36 Турнир городов. <u>Осенний тур.</u>

Сложный вариант, самые младшие классы

6-7 класс

1. [3] *Восемь бизнесменов купили квадратный остров со стороной 300м. Они хотят вырыть квадратный бассейн со стороной 20 м, а всю оставшуюся территорию разделить на 8 одинаковых треугольных участков для строительства коттеджей. Как это можно сделать?*

Ответ: Решение см. на рис.1.

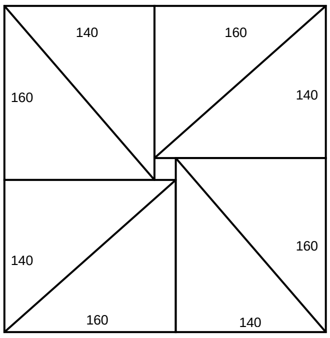

Рис. 1

2. [4] *У Змея Горыныча 2014 голов. Богатырь может срубить ему одним ударом меча 33, 21, 16 или 1 голову, но при этом у Змея вырастают соответственно 48, 0, 13 или 349 голов. Если отрублены все головы, то новых голов не вырастает. Сможет ли богатырь одолеть Змея?*

Ответ: 667 раз отрубить по 16 голов.

Комментарий: после первых 666 таких ударов будет вырастать по13 голов, т.е. всего будет отрублено по 666·3=1998 голов. Останется 16 голов, которые отрубили еще одним таким ударом (после которого будут отрублены все головы, а значит, новые не вырастают).

3. [4] *На осеннем базовом туре Турнира городов каждый участник обнаружил ровно 25 знакомых. Количество участников осеннего сложного тура на 125 человек меньше, чем базового. Мог ли каждый участник сложного тура обнаружить ровно по 21 знакомому?*

Ответ: Нет.

Решение: Пусть на базовом туре было x участников, но тогда число «знакомств» (или пар знакомых) было $\frac{x\cdot 25}{2}$, т.е. $x-$ четное число. Аналогично, если на сложном туре было y участников, то y $-$ четное число ($\frac{y\cdot 21}{2}$ должно быть целым). Но невозможно, чтобы $x-y=125$, ибо эта разность будет четной.

4. *Дана квадратная таблица* 7×7. *В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус. Обязательно ли в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов, если всего в таблице*

[2] *а) 28 плюсов;*

[4] *б) 27 плюсов?*

Ответ: а) необязательно

б) обязательно.

Решение: а) см. пример рис.2

+	+	+	+	+	+	+
-	+	+	+	+	+	+
-	-	+	+	+	+	+
-	-	-	+	+	+	+
-	-	-	-	+	+	+
-	-	-	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	+

рис.2

-						+
-						+
-						+
-						+
-						+
-						+
-						+

рис.3

б) Для того чтобы для 27 плюсов выполнялось условие: во всех столбцах и строках различное количество плюсов необходимо, в частности, чтобы один из столбцов полностью состоял из «–», и еще один полностью из «+». Иначе в первом случае должно быть 28 плюсов (напомним, во всех столбцах разное количество плюсов и их не более семи, т.е. в разных столбцах должно быть 1,2,3,4,5,6,7 плюсов в некотором порядке). Аналогично во втором случае будет всего 21 плюс. Пусть это будет первый и седьмой столбцы (рис.3). Рассмотрим теперь строки; их семь, а различность вариантов количеств плюсов – шесть (от нуля до пяти). По принципу Дирихле в каких-то двух строках будет одинаковое количество плюсов.

5. *Назовем натуральное число ровным, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что*

[2] *а) любое двузначное число можно представить как сумму не более чем 3 ровных чисел;*

[5] *б) любое трехзначное число можно представить как сумму не более чем 4 ровных чисел.*

Доказательство.

а) Запишем двузначное число в виде $\overline{ab}$, где a и b цифры $a \neq 0$. Если $a \leq b$, то $\overline{ab} = \overline{aa} + (b-a)$, т.е. всего не более двух слагаемых. Если $a > b+1$, то $\overline{ab} = \overline{(a-1)(a-1)} + 11 - (a-b)$, при этом $11-(a-b) \leq 9$, т.е. ровное число. Если $a = b+1$, то, $\overline{ab} = \overline{bb} + 10 = \overline{bb} + 5 + 5$ т.е. здесь понадобится три ровных числа.

б) Представим сначала требуемым образом числа, которые назовем особыми

100=99+1
101=99+2
…………
108=99+9
109=99+9+1
110=99+9+2 (или 110=55+55)

Заметим, что для разложения всех этих чисел понадобилось не более трех ровных слагаемых. Все остальные трехзначные числа разобьем на группы:

$$111-221;\quad 222-332;\quad 333-443;\quad \ldots;\quad 777-887;\quad 888-998,$$

и останется число 999, которое само является ровным. В каждой группе любое число представимо в виде:

либо $\overline{aaa}$ $\quad(a = 1,2,3,\ldots 8)$

либо $\overline{aaa}$ + двузначное число,

либо $\overline{aaa}$ + особое число.

Но каждое двузначное и каждое особое число представимо в виде не более чем трех ровных слагаемых; отсюда и следует утверждение задачи.

6. *Обозначим через $n\,!$ число, равное произведению всех различных натуральных чисел от 1 до n, например: 5! = 1·2·3·4·5 = 120, 10! = 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10. Можно ли все натуральные числа*

[3] *а) 5!; б) 10! (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было*

[6] *одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?*

Ответ: а) Да. б) Нет.

Решение. а) $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 2^3\cdot3\cdot5$ Рассмотрим эту же задачу для меньших $n!$, например: 3!=1·2·3=6. Здесь всего четыре делителя 1,2,3,6 и разбиение на группы очевидно: {1; 6} и {2; 3}. 4!=1·2·3·4=24. Делители этого числа: 1,2,3,4,6,8,12,24. Легко заметить, что пары делителей, симметричные относительно середины, т.е. 1 и 24, 2 и 12, 3 и 8, 4 и 6 в произведении дают 24 (хорошо еще подметить такую закономерность $12 = \frac{24}{2}$, $8 = \frac{24}{3}$, $6 = \frac{24}{4}$, т.е. все делители разбиваются на пары: d и $\frac{24}{d} = \frac{4!}{d}$). Из этих четырех пар теперь легко составить две группы чисел (по две любые пары), таких, что произведения всех чисел в этих группах равны, например, 1·24·2·12=3·8·4·6. Рассмотрим все делители числа 5!. К рассмотренным выше делителям числа 4! добавятся такие же числа, умноженные на 5, т.е. 1,2,3,4,6,8,12,24 и 5,10,15,20,30,40,60,120. Осталось разбить их на пары, аналогично предыдущему:

1 и 24,   2 и 12,   3 и 8,   4 и 6,   5 и 120,   10 и 60,   15 и 40,   20 и 30.

Тогда в первую группу чисел возьмем, например: {1,24,2,12,5,120,10,60}, а во вторую: {3,8,4,6,15,40,20,30}.

Важное замечание. Можно разбить делители числа 5! на пары и по другому (по аналогии с 4!) с каждым делителем d взять в пару число $\frac{120}{d}$ (т.е. пары будут иметь вид $\left(d;\frac{120}{d}\right)$ и их будет 8, причем простой делитель 5 будет входить по одному разу в каждую пару).

б) Воспользуемся идеей высказанной в предыдущем замечании. Знаем, что $10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$, т.е. число10! не является точным квадратом, поэтому все делители этого числа тоже можно разбить на пары: $\left(d;\frac{10!}{d}\right)$. В каждой паре одно число делится на 7, а второе – нет. Причем все делители, не делящиеся на 7, состоят из произведений различных степеней числа 2 (от 0-й, до 8-й), числа 3 (от 0-й, до 4-й), и числа 5 (от 0-й, до 2-й), т.е. всего таких делителей $9\cdot 5\cdot 3$ – нечетное число. Столько же делителей, т.е. $9\cdot 5\cdot 3=135$, делятся на 7 в первой степени. Таким образом, число 7 входит во все делители числа 10! нечетное число раз, а следовательно, такие делители (т.е. кратные 7) не могут быть распределены по двум группам так, чтобы число 7 в обеих группах присутствовало одинаковое число раз!

7. **[9]** *Паутина имеет вид клетчатой сетки 4×4 узла (другими словами, это сетка 3×3 клетки). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 4 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Всегда ли пауку хватит 10 ходов, чтобы съесть всех мух?*

Ответ: Нет.

Решение. Пусть хватит. Раскрасим узлы в шахматном порядке. Пусть узлы №1, 2, 3, 4 – мухи, Х – паук (см. рис 4). В соответствии с раскраской, паук после 10 хода не изменит свой первоначальный цвет. Ясно, что последней съеденной мухой должна быть №1 или №4. (так как ползти от №1 к №4, а потом к №3 или №2 долго!) Мухи №1 и №4 имеют цвет, отличный от первоначального цвета паука,

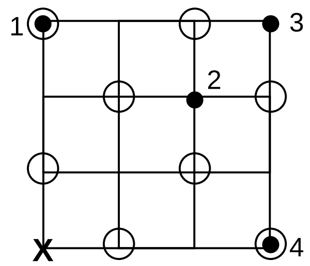

рис.4

следовательно, паук съедает №1 или №4 после 9 хода, но 9 ходов нужно пауку, чтобы просто дойти до №1, от №1 к№3, от №3 до №4. На то, чтобы съесть муху №2, ходов не хватит.