36-й Международный математический Турнир городов

2014/15 учебный год

Решения задач

Составитель Леонид Медников

Осенний тур

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1. [4] Дана квадратная таблица. В каждой ее клетке стоит либо плюс, либо минус, причём всего плюсов и минусов поровну. Докажите, что или в каких-то двух строках, или в каких-то двух столбцах одинаковое количество плюсов.

(*Б.Р. Френкин*)

Решение. Из условия видно, что число клеток в таблице чётно, то есть это таблица $2n\times 2n$, а число плюсов равно $2n^2$. Предположим, что удалось расставить знаки так, что количества плюсов во всех строках различны.

Если при этом нет строки, заполненной одними плюсами, то в строках реализуются по одному разу все количества плюсов от 0 до $2n - 1$. Но тогда общее число плюсов равно $n(2n - 1) < 2n^2$. Противоречие.

Пусть есть строка, заполненная плюсами. Тогда нет столбца без плюсов. Если во всех столбцах количества плюсов различны, то это все числа от 1 до $2n$, и общее число плюсов равно $n(2n + 1) > 2n^2$. Значит в каких-то двух столбцах плюсов поровну.

2. [5] Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

(*Т.В. Казицына, Б.Р. Френкин*)

Решение. Пусть наибольшая сторона AB многоугольника касается вписанной окружности в точке K, а BC и AD – соседние стороны. Тогда $BC > BK$, $AD > AK$, значит, $BC + AD > AB$, и из сторон AB, AC и BC можно составить треугольник.

3. [6] Можно ли все натуральные делители числа 100! (включая 1 и само число) разбить на две группы так, чтобы в обеих группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы?

(*М.И. Малкин*)

Ответ: можно.

Решение. 100! делится на 31^3, но не делится на 31^4. Поэтому все множители числа 100! можно разбить на четверки вида $\{n, 31n, 31^2n, 31^3n\}$, где n – произвольный делитель числа $\frac{100!}{31^3}$. Из каждой такой четверки числа n и 31^3n поместим в одну группу, а числа $31n$ и 31^2n – в другую.

4. [7] На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

(*Е.В. Бакаев*)

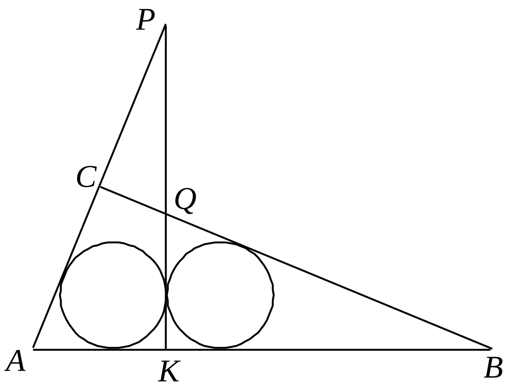
Решение. Будем считать, что длина дороги равна 25. Пусть при переходе от исходной расстановки A в некоторую «упорядоченную» расстановку B каждый из полицейских переместился (разумеется, каждый из них двигался по меньшей дуге, соединяющей его исходное положение с новым). Докажем, что суммарное пройденное расстояние можно уменьшить. Не менее 13 полицейских шли на новое место в одном направлении (пусть по часовой стрелке). Рассмотрим расстановку C, получающуюся из B сдвигом на одно место против часовой стрелки. Теперь при переходе из A в C как минимум у 13 полицейских пройденное расстояние уменьшились на 1, а у остальных, если и увеличились, то не больше чем на 1. В результате суммарное расстояние уменьшилось как минимум на 1.

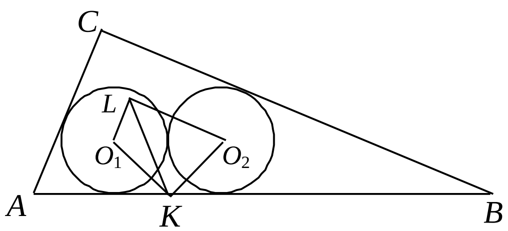
5. [8] Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая касается другого катета и гипотенузы, а ещё эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N – точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

(*Е.В. Бакаев*)

Решение. Достаточно доказать, что середина K отрезка MN равноудалена от катетов AC и BC треугольника ABC.

Первый способ. Пусть общая касательная к двум окружностям, проведённая через точку K, пересекает прямые AC и BC, в точках P и Q соответственно (рис. слева). Прямоугольные треугольники AKP и QKB очевидно подобны, а так как их вписанные окружности равны, то и эти треугольники равны. Значит, равны и их высоты, опущенные из общей вершины K, то есть расстояния от K до прямых AC и BC.





Второй способ. Проведём через центры O_1 и O_2 окружностей прямые, параллельные ближайшим катетам, до пересечения в точке L (рис. справа). Углы O_1LO_2 и O_1KO_2 – прямые, значит, четырёхугольник O_1LO_2K – вписанный. Поэтому углы O_1LK и O_2LK равны как опирающиеся на равные хорды. Следовательно, LK – биссектриса угла O_1LO_2, то есть точка K равноудалена от прямых O_1L и O_2L, а значит, и от прямых AC и BC (расстояние между прямыми O_1L и AC, как и расстояние между прямыми O_2L и BC, равно радиусу исходных окружностей).

Третий способ. Точка K равноудалена от окружностей, а значит, существует поворот с центром в точке K, переводящий первую окружность (касающуюся катета AC) во вторую (касающуюся катета BC). Очевидно, что это поворот на 90°. При этом повороте прямая AC переходит, во-первых, в перпендикулярную прямую (так как поворот на 90°). Во-вторых, она перейдёт в прямую, касающуюся второй окружности (так как AC касается первой окружности). Из этих двух условий следует, что прямая AC перейдёт в прямую BC. Значит, эти две прямые равноудалены от центра поворота K, и, таким образом, K лежит на биссектрисе угла между этими прямыми.

6. [8] Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: 4, 111, 999999). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.

(*А.В. Шаповалов*)

Решение. Пусть $A_n = 1\ldots1$ (единиц). Докажем по индукции более сильное утверждение:

любое число $a \le A_n$ можно представить как сумму не более чем n ровных чисел.

База ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Число A_{n+1} само ровное. Если же $a \le A_{n+1} - 1 = 10A_n$, то a можно записать в виде $qA_n + r$, где $0 \le q \le 9$, $0 \le r \le A_n$. Число qA_n – ровное, а r можно представить как сумму не более чем n ровных чисел по предположению индукции.

7. Паутина имеет вид клетчатой сетки 100×100 узлов (другими словами, это сетка 99×99 клеток). В каком-то ее углу сидит паук, а в некоторых 100 узлах к паутине приклеились мухи. За ход паук может переместиться в любой соседний с ним узел. Может ли паук гарантированно съесть всех мух, затратив не более

а) [5] 2100 ходов;

б) [5] 2000 ходов?

(*И.И. Богданов*)

Ответ: а), б) может.

Первое решение. б) Разделим сетку на 10 горизонтальных *полосок* по 1000 узлов (9×99 клеток). Пусть паук сидит в левом нижнем углу. Сначала он двигается слева направо по нижнему краю нижней полоски, пока не увидит муху, приклеенную в этой же полоске над ним. Тогда он пересекает полоску по вертикали, съедая муху, и продолжает движение направо по верхнему краю полоски, пока не увидит муху, приклеенную под ним. Тогда он снова переходит на нижний край полоски и т.д. Достигнув правого края полоски он переходит по вертикали на нижний край следующей полоски. Всего на это он затратит не более $99 + 9k + 10$ ходов, где k – количество мух в первой полоске. Далее он повторяет «процедуру», двигаясь справа налево вдоль второй полоски и т.д. На уничтожение всех 100 мух ему потребуется не более $10\cdot99 + 9\cdot100 + 9\cdot10 = 1980$ ходов.

Второе решение (Панкратов Виктор, 9-й класс, физмат лицей № 5 г. Долгопрудный). б) Занумеруем горизонтальные линии, проходящие через узлы, числами от 1 до 100. Покрасим красным цветом линии с номерами 5, 15, ... 95 (10 линий), а синим – линии с номерами 1, 10, 20, ... 100 (11 линии). Дополним красные линии (проведя 99 вертикальных единичных отрезков) до красной змейки, а синие линии – до синей змейки (змейка идет из левого верхнего угла в один и нижних углов). Длина красной змейки – $99\cdot11$, а синей – $99\cdot12$.

От любой мухи можно дойти как до красной змейки, так и до синей, не более, чем за 5 ходов. Муху, от которой до красной змейки можно дойти за 3 или менее ходов, назовём красной, а иначе – назовём синей. От любой синей мухи до синей змейки можно дойти не более, чем за 1 ход.

Если красных мух не меньше 59, то алгоритм такой: идем по красной змейке, как только доходим до точки, ближайшей к какой-нибудь мухе – отходим к этой мухе, забираем ее и возвращаемся на красную змейку, идем по ней дальше. Длина пути будет не более $99\cdot11+59\cdot6+41\cdot10 = 1853$ (забирая синюю муху, мы тратим не более 10 ходов, забирая красную муху – не более 6).

Если же красных мух не более 58, то синих мух не менее 42, и тогда алгоритм тот же, только идем по синей змейке и собираем мух. Длина пути не более $99\cdot12+42\cdot2+58\cdot10 = 1852$ (забирая красную муху, мы тратим не более 10 ходов, забирая синюю муху – не более 2).

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1. [4] См. задачу 2 мл. классов.

2. [6] См. задачу 4 мл. классов.

3. [6] Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

(*Г.А. Гальперин*)

Ответ: 99.

Решение. *Оценка*. Пусть записаны числа a_1, a_2, …, a_{100}. Положим $b_i = a_i - a_1$. Многочлен сотой степени $P(x) = (x + b_1)\ldots(x + b_{100})$ не может принимать одно значение более 100 раз. Но по условию он принимает одно и то же значение в точках a_1, $a_1 + 1$, $a_1 + 2$, …, $a_1 + k$. Следовательно, $k \le 99$.

Пример. Пусть записаны числа –99, –98, …, – 1, 0. Тогда при прибавлении к ним от одной до 99 единиц произведение полученных чисел равно нулю.

4. [7] Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке G. Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_C, B_A. Докажите, что точки A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B лежат на одной окружности.

(*А.А. Заславский*)

Решение. Докажем, что указанные шесть точек равноудалены от центра I вписанной в треугольник ABC окружности.

Хорды $B'C_A$ и $A'C_B$ описанной окружности треугольника $GA'B'$ пересекаются в точке C, поэтому $B'C\cdot C_AC = A'C\cdot C_BC$. Так как $B'C = A'C$, то и $C_AC = C_BC$. Значит, $A'C_AC_BB'$ – равнобедренная трапеция и серединный перпендикуляр к ее основанию C_AC_B содержит биссектрису угла C, то есть проходит через I.

Для секущих, проведенных из точки A к той же окружности, верно равенство $AB'\cdot AC_A = AG\cdot AA'$. Аналогично, $AC'\cdot AB_A = AG\cdot AA'$. Так как $AB' = AC'$, то и $AC_A = AB_A$. Значит, серединный перпендикуляр к ее отрезку B_AC_A содержит биссектрису угла A, то есть проходит через I.

Итак, точка равноудалена от точек B_A, C_A, C_B. Аналогично доказывается ее равноудаленность от точек A_B, C_A, C_B. И так далее.

5. [7] Петя посчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася посчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово – это любая последовательность букв.)

(*Г.А. Погудин*)

Ответ: слов получилось поровну.

Решение. Установим взаимно-однозначное соответствие между словами Пети и Васи. Разобьём Васино слово из $2m$ букв на блоки из двух букв. Заменим каждый блок TT на букву T, блок OO – на букву O, блок TO – на букву W, и блок OT – на букву N. Мы получим слово из m букв, в котором букв T и O будет поровну (изначально их было поровну, замена блоков TO и OT убирает равное число букв T и O, а значит, и блоков TT будет столько же, сколько блоков OO). Итак, каждому слову Васи мы сопоставили слово Пети.

Наоборот, по каждому m-буквенному слову Пети легко восстановить, из какого слова Васи оно получилось по описанному выше правилу: надо заменить буквы по правилу T –> TT, O –> OO, W –> TO, N –> OT (ясно, что при такой замене мы получим слово из $2m$ букв, в котором букв T и O поровну).

Это и означает, что Васиных слов столько же, сколько Петиных.

6. [8] На столе лежал проволочный треугольник с углами $x°$, $y°$, $z°$. Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)°$, $181°$, $(y-1)°$, $181°$, $(z-1)°$, $181°$. Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

(*И.В. Митрофанов*)

Решение. Превратим стороны полученного шестиугольника в векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{w}$, поставив на них стрелки в направлении обхода (обход начинается с вершины с углом 181°).

Заметим, что угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{u}$ равен $(x-1)°$, а угол между векторами $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{a}$ равен 1° (по условию), откуда угол между векторами $\boldsymbol{w}$ и $-\boldsymbol{u}$ равен $x°$. Найдя таким образом углы между векторами $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ видим, что углы межу ними такие же, как и между векторами сторон исходного треугольника.

Заметим, что $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. Повернём вектор $\boldsymbol{a}$ на 1° так, чтобы он стал сонаправлен вектору $\boldsymbol{w}$. Полученный вектор обозначим $\boldsymbol{a}'$. Аналогично построим векторы $\boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{c}'$.

Из векторов $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}'$ составляется треугольник, равный исходному треугольнику ABC: эти векторы по модулю равны соответствующим сторонам треугольника ABC, и углы между ними такие, как в ABC. Следовательно, $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{0}$. Сравнивая с предыдущим равенством, получаем: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{c}'$. Но в этом равенстве правая часть получается из левой части поворотом на 1°. Значит, обе суммы равны нулю. Поэтому из векторов $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$ составляется треугольник. Этот треугольник подобен треугольнику ABC, так имеет равные с ним углы. Таким образом, длины векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ пропорциональны длинам сторон исходного треугольника, что и требовалось.

Набросок второго решения.

Пусть точка излома на одной из сторон треугольника делит её в некотором отношении k. Если на двух других сторонах выбрать точки излома, делящие стороны в том же отношении k, то из полученных «погнутых» сторон сложится нужный шестиугольник (проверьте!).

Зафиксируем на первой из сторон точку излома. Тогда для решения задачи достаточно доказать, что точки излома на второй и третьей других сторонах восстанавливаются однозначно. Идея доказательства такова. Будем пристраивать к первой стороне вторую сломанную сторону (под требуемым в условии углом), варьируя точку излома. Свободная вершина второй стороны тогда будет двигаться по некоторой прямой m. Аналогично, пристраивая к первой стороне третью (под требуемым в условии углом), и варьируя на ней точку излома, получим, что свободная вершина третьей стороны также движется по некоторой прямой n. Можно показать, что прямые m и n не параллельны. Но тогда они пересекаются в единственной точке, то есть оставшиеся вершины шестиугольника восстанавливаются однозначно.

7. [10] В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xg = yp$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

(*И.И. Богданов*)

Ответ. Не может.

Решение. Докажем, что если вначале у банкира по 1 кг песка, и $g = p = k$, то в конце хотя бы одного песка будет не больше $2 - {}^1/_k$ кг. Для этого достаточно доказать, что если вначале у банкира по $\frac{k}{2k-1}$ кг песка, то в конце он не может получить каждого песка больше, чем по килограмму.

Назовём *состоянием* банкира число $S = Gp + Pg$ если у него G кг золота и P кг платины. Заметим, что в результате обмена песка по курсу состояние не меняется. Покажем индукцией по числу дней, что наибольшее гарантированное состояние банкира в день, когда курсы равны g и p, не превосходит $\frac{2gp}{g+p-1}$. В начальный день это так.

Пусть в некоторый день это так. Ясно, что при этом либо $Gp \geq \frac{g-1}{g+p-2}S$, либо $Pg \geq \frac{p-1}{g+p-2}S$. (Оба неравенство выполнены одновременно, только в случае, когда оба превращаются в равенства.)

Пусть выполнено первое неравенство, то есть $G \geq \frac{g-1}{g+p-2}\cdot\frac{S}{p}$. Тогда государство уменьшит p на 1 (случай $g > p = 1$ будет разобран ниже). При этом из состояния вычтется G, то есть оно станет равно

$$S - G \leq \left(p - \frac{g-1}{g+p-2}\right)\cdot\frac{S}{p} = \frac{pg + p^2 - 2p - g + 1}{g+p-2}\cdot\frac{S}{p} =$$

$$= \frac{(p-1)(p+g-1)}{g+p-2}\cdot\frac{2g}{g+p-1} \leq \frac{2g(p-1)}{g+(p-1)-1},$$ что и требовалось.

Случай, когда выполнено второе неравенство, в частности, случай $g > p = 1$, разбирается «симметрично».

В итоге, в последний день ($g = p = 1$) состояние будет не больше 2, а значит, количество какого-то песка будет не больше килограмма.

Замечание. Полученная оценка – точная. Если банкир каждый день будет делать так, чтобы массы золотого и платинового песков относились как $g(g-1) : p(p-1)$ (что возможно), то его состояние каждый день будет равняться $\frac{2gp}{g+p-1}$. В частности в последний день у него будет ровно два килограмма песка, и он сможет его обменять так, что каждого сорта будет по 1 кг.