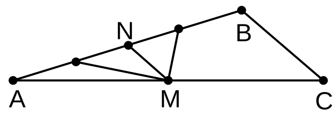
36-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура
Базовый вариант, 8-9 классы

1. [3] Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трех цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.)

Ответ. Можно. **Решение**. Покрасим верхнюю грань в первый цвет, нижнюю – во второй, а остальные четыре – в третий.

2. [4] На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом.

Решение. Пусть N – середина AB (и одновременно – середина KL). Длина средней линии MN равна ½ BC = ½ KL. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром KL.



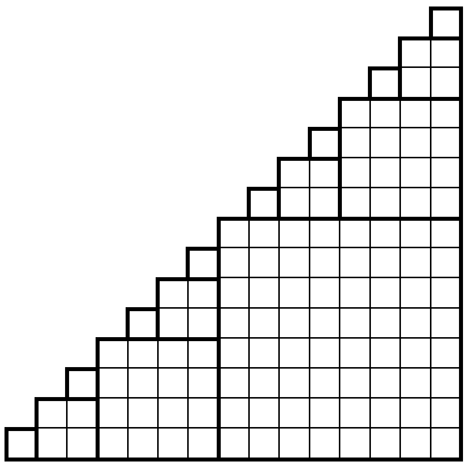
3. [4] Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Ответ. Могли. **Решение**. $2^9 + \ldots + 2^{18} = 2^9(2^{10} - 1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2^{10} - 1)$.

Замечание. Это – единственный пример.

4. [4] На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток.

Ответ. На 15 квадратов. **Решение**. Очевидно, крайние левые клетки двух разных строк не могут принадлежать одному квадрату. Значит, квадратов не меньше 15. Пример с 15 квадратами см. на рисунке.



5. [5] Дано $2n + 1$ число (n – натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел?

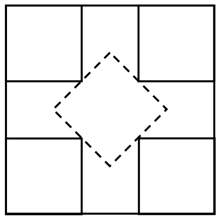
Ответ. Для любых. **Решение**. Расположим числа так:
…, 6, 4, 2, n, 0, 2, 4, 6, …, 5, 3, 1, n, 1, 3, 5, … (сначала стоят в убывающем порядке все чётные положительные числа, меньшие n, потом n, 0, те же чётные числа в возрастающем порядке, далее все нечётные, меньшие n, – в убывающем, n и те же нечётные в возрастающем порядке).

36-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура
Базовый вариант, 10-11 классы

1. [3] Петя сложил 100 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Ответ. Могли. **Решение**. $2^{99} + \ldots + 2^{198} = 2^{99}(2^{100} - 1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2^{100} - 1)$.

2. [4] Ковер имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

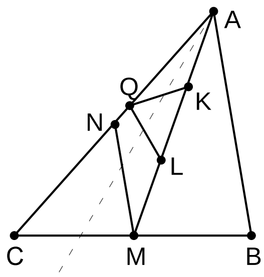


Ответ. Можно. **Решение**. На ковре можно разместить пять непересекающихся квадратов со стороной 1 м (см. рисунок; сторона пунктирного квадрата равна $0{,}75\sqrt{2} > 1$). Хотя бы один из них останется без дырки.

3. [4] Дано $2n + 1$ число (n – натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел?

Ответ. Для любых. **Решение**. Расположим числа так:
$\ldots, 6, 4, 2, n, 0, 2, 4, 6, \ldots, 5, 3, 1, n, 1, 3, 5, \ldots$ (сначала стоят в убывающем порядке все чётные положительные числа, меньшие n, потом n, 0, те же чётные числа в возрастающем порядке, далее все нечётные, меньшие n, – в убывающем, n и те же нечётные в возрастающем порядке).

4. [5] Точки K и L делят медиану AM треугольника ABC на три равные части, точка K лежит между L и A. Отметили точку P так, что треугольники KPL и ABC подобны, причём P и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AM. Докажите, что P лежит на прямой AC.



Решение. Пусть N – середина AC. **Первый способ**. Рассмотрим на стороне AC такую точку Q, что $\angle ALQ = \angle C$. Тогда треугольники ALQ и ACM подобны (по двум углам). При этом подобии медиана MN треугольника ACM переходит в медиану QK треугольника ALQ. Следовательно, треугольник KQL подобен треугольнику NMC, а значит, и треугольнику ABC. Таким образом, точки P и Q совпадают.

Второй способ. Рассмотрим композицию симметрии относительно биссектрисы угла CAM, переводящей C в точку C', и гомотетии с центром A, переводящей C' в L. При этом точка N перейдёт в K, а образ точки M попадёт на прямую AC и, поскольку треугольники NMC и KPL подобны, совпадёт с P.

5. [5] По кругу записывают 2015 натуральных чисел так, чтобы любые два соседних числа различались на их наибольший общий делитель. Найдите наибольшее натуральное N, на которое гарантированно будет делиться произведение этих 2015 чисел.

Ответ. $N = 3\cdot 2^{1009}$. **Решение**. *Оценка*. Два нечётных числа не могут стоять рядом, так как они не делятся на свою чётную разность. Поэтому чётных чисел не меньше половины, то есть хотя бы 1008. Так как их больше половины, то какие-то два чётных числа стоят рядом. Из этой пары чётных чисел хотя бы одно кратно 4, иначе их разность кратна 4, а сами они – нет.

Предположим, у нас нет чисел, кратных 3. Тогда, из-за нечётности количества чисел, какие-то два соседних числа дают одинаковые остатки при делении на 3. Эти числа делятся на свою разность, которая кратна 3. Противоречие.

Следовательно, $N \geq 3\cdot 2^{1009}$.

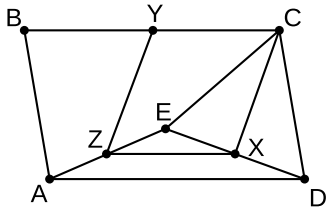
Пример. Числа 4, 3, 2, 1, 2, 1, …, 2, 1, 2 удовлетворяют условию. Их произведение равно $3\cdot 2^{1009}$.

36-й Международный математический Турнир городов

Решения задач весеннего тура

Сложный вариант, 8-9 классы

1. [4] Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку, соединяющему середины отрезков AE и BC.



Решение. Пусть X, Y и Z – середины DE, BC и AE соответственно. Так как ZX – средняя линия треугольника AED, то $CXZY$ – параллелограмм. CX – медиана, а значит, и высота равнобедренного треугольника DCE, следовательно, $ED \perp CX \parallel YZ$.

2. [6] Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи – болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоит снаружи базы, а часть – внутри. (Линия электропередач не проходит через вершины забора.) Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Ответ. Один столб. **Решение**. Прямая ЛЭП пересекается с территорией базы по нескольким отрезкам. Шпион считает столбы, когда оказывается в конце одного из этих отрезков. Рассмотрим один из них (AB). Когда шпион находится в точке A, он считает столбы по одну сторону от AB, а когда находится в точке B, считает столбы по другую сторону от AB. Если к этим столбам добавить столбы внутри AB, то получится 36 столбов. Складывая эти равенства для всех отрезков, получим, что 2015 плюс количество n столбов внутри базы делится на 36. Так как $n \le 36$ и 2016 делится на 36, то $n = 1$.

3. **а**) [3] Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра – единица?

б) [4] Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.

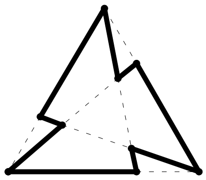
Ответ. Не обязательно. **Решение**. **а**) Числа 99, $99^2 = 9801$, $99^3 = 970299$ начинаются с девятки.

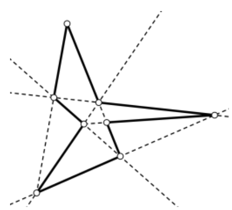
б) Очевидно, найдется такое натуральное k, что $10^{-k} \le 1 - \sqrt[2015]{0{,}9}$. Тогда неравенство $0{,}9 \le (1 - 10^{-k})^{2015} \le (1 - 10^{-k})^n < 1$ выполнено при всех $n \le 2015$. Умножая на 10^{kn}, получим $0{,}9\cdot 10^{kn} \le (10^k - 1)^n < 10^{kn}$. Это значит, что при $x = 10^k - 1$ все числа вида x^n, где $n = 1, 2, \ldots, 2015$, начинаются с девятки.

Замечание. Годится уже $k = 5$, так как по *неравенству Бернулли* $0{,}9 \le 1 - n\cdot 10^{-5} \le (1 - 10^{-5})^n$ даже для $n \le 10000$.

4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника **а**) [4] не превосходить девяти; **б**) [5] не превосходить восьми?

Ответ. Может. **Решение**. См. рисунки:





Замечание. Можно доказать, что число вершин такого многоугольника не может быть меньше восьми.

5. **а**) [3] В таблицу $2\times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) [6] В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

а) **Решение**. Допустим, суммы в строках равны. Если есть столбец, где числа различны, то поменяем их местами, и суммы чисел в строках станут разными.

Если в каждом столбце оба числа равны, то все числа в строке различны. Возьмём три наименьших числа $a < b < c$ в верхней строке и переставим их циклически. Так как $b + a < a + c < b + c$, причём $b + c$ меньше суммы чисел в любом из оставшихся $n - 3$ столбцов, то суммы чисел в столбцах останутся различными. Теперь у нас есть столбец, где числа различны.

б) **Ответ**. Не всегда. **Решение**. Приведём *контрпример* для таблицы $n\times n$. Впишем в столбцы последовательно по 0, 1, …, $(n - 2)$, n единиц, а в остальные клетки впишем нули. Число, равное $0 + 1 + \ldots + (n - 2) + n$, нельзя по-другому разбить на n целых различных неотрицательных слагаемых. Следовательно, указанное разбиение единиц по столбцам единственное, при котором суммы в них различны. Значит, при любой «допустимой» перестановке обязательно должны быть столбец из нулей и столбец из единиц. То же самое можно сказать и про строки, если суммы в них различны. Но наличие столбца из нулей противоречит наличию строки из единиц.

6. [9] Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные – в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Решение. Пусть каждая сторона $A_iA_{i+1} = a$ многоугольника $A_1\ldots A_N$ продолжена синим отрезком $A_iB_i = b_i$ и красным отрезком $A_{i+1}C_i = c_i$ (считаем, что $A_{N+1} = A_1$). Хорды B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке A_2, значит, $c_1(a + b_1) = b_2(a + c_2)$, т. е. $(c_1 - b_2)a = b_2c_2 - b_1c_1$. Аналогично, $(c_2 - b_3)a = b_3c_3 - b_2c_2$ и т. д. Сложив все эти равенства, получим $(c_1 +\ldots+ c_N - b_1 -\ldots- b_N)a = 0$, то есть $c_1 +\ldots+ c_N = b_1 +\ldots+ b_N$.

7. [10] Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император, в каком хочет порядке, задаёт каждому волшебнику по вопросу (требующему ответа «да» или «нет») и слушает ответ, а после всех ответов одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь задаёт каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

Решение. *Первый этап*. Император выделяет одного волшебника A и спрашивает всех оставшихся, добрый ли он (а его – о чём угодно). Имеем два случая.

1) Все сказали «нет». Тогда император изгоняет A. Если оказалось, что A – добрый, то все остальные волшебники – злые, и император изгоняет их по очереди, задавая произвольные вопросы. Если оказалось, что A – злой, то число злых волшебников уменьшилось, и император снова повторяет первый этап.

2) Нашелся волшебник B, сказавший «да». Тогда император изгоняет B. Если оказалось, что B – злой, то император также возвращается к первому этапу. Если оказалось, что B – добрый, то император понимает, что A – добрый и переходит ко второму этапу.

Второй этап. Император ставит волшебников по кругу и спрашивает каждого, добрый ли следующий. Если все ответили «да», то все оставшиеся в зале волшебники – добрые, и император останавливается.

Если кто-то ответил «нет», то первый, начиная со следующего за A волшебника, про которого так сказали, – злой. Император его изгоняет и возвращается ко второму этапу.

36-й Международный математический Турнир городов

Решения задач весеннего тура

Сложный вариант, 10-11 классы

1. **а**) [2] Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра – единица?

б) [3] Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.

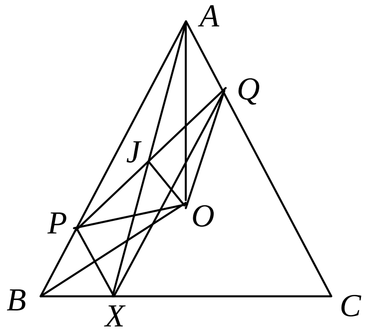
Ответ. Не обязательно.

Решение. **а**) Числа 99, $99^2 = 9801$, $99^3 = 970299$ начинаются с девятки.

б) Очевидно, найдется такое натуральное k, что $10^{-k} \le 1 - \sqrt[2015]{0{,}9}$. Тогда неравенство $0{,}9 \le (1 - 10^{-k})^{2015} \le (1 - 10^{-k})^n < 1$ выполнено при всех $n \le 2015$. Умножая на 10^{kn}, получим $0{,}9 \cdot 10^{kn} \le (10^k - 1)^n < 10^{kn}$. Это значит, что при $x = 10^k - 1$ все числа вида x^n, где $n = 1, 2, \ldots, 2015$, начинаются с девятки.

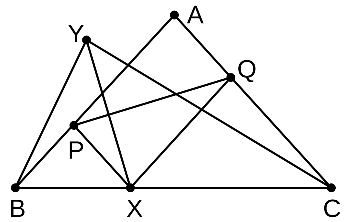
Замечание. Годится уже $k = 5$, так как по *неравенству Бернулли* $0{,}9 \le 1 - n \cdot 10^{-5} \le (1 - 10^{-5})^n$ даже для $n \le 10000$.

2. [5] На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, а на сторонах AB и AC – соответственно точки P и Q таким образом, что $APXQ$ – параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, попадает на описанную окружность треугольника ABC.



Первое решение. Пусть O – центр описанной окружности Ω треугольника ABC, J – центр параллелограмма $APXQ$. Треугольники AOB и BAC – равнобедренные, поэтому $\angle ABO = \angle BAO = \angle OAQ$. Значит, треугольники BPO и AQO равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $OP = OQ$, то есть OJ – серединный перпендикуляр к PQ.

Заметим, что точку Y можно получить в два этапа: сначала отразить X относительно точки J, а затем отразить полученную точку A относительно прямой OJ, перпендикулярной PQ. Теперь очевидно, что Y лежит на окружности Ω.



Второе решение. Так как PX и AC параллельны, то треугольник BPX тоже равнобедренный, следовательно, B, X и Y равноудалены от P, значит $\angle BYX = ½ \angle BPX = ½ \angle A$. Аналогично, $\angle CYX = ½ \angle A$. Поэтому $\angle BYC = \angle BAC$ и точки B, Y, A, C лежат на одной окружности.

Замечание. Мы неявно использовали очевидный факт: точки P, Y, A, Q лежат по одну сторону от BC.

3. **а**) [2] В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) [6] В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

а) **Решение**. Допустим, суммы в строках равны. Если есть столбец, где числа различны, то поменяем их местами, и суммы чисел в строках станут разными.

Если в каждом столбце оба числа равны, то все числа в строке различны. Возьмём три наименьших числа $a < b < c$ в верхней строке и переставим их циклически. Так как $b + a < a + c < b + c$, причём $b + c$ меньше суммы чисел в любом из оставшихся $n - 3$ столбцов, то суммы чисел в столбцах останутся различными. Теперь у нас есть столбец, где числа различны.

б) **Ответ**. Не всегда.

Решение. Приведём *контрпример* для таблицы $n \times n$. Впишем в столбцы последовательно по 0, 1, …, $(n-2)$, n единиц, а в остальные клетки впишем нули. Число, равное $0 + 1 + \ldots + (n-2) + n$, нельзя по-другому разбить на n целых различных неотрицательных слагаемых. Следовательно, указанное разбиение единиц по столбцам единственное, при котором суммы в них различны. Значит, при любой «допустимой» перестановке обязательно должны быть столбец из нулей и столбец из единиц. То же самое можно сказать и про строки, если суммы в них различны. Но наличие столбца из нулей противоречит наличию строки из единиц.

4. [8] Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные – в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

Решение. Пусть каждая сторона $A_iA_{i+1} = a$ многоугольника $A_1\ldots A_N$ продолжена синим отрезком $A_iB_i = b_i$ и красным отрезком $A_{i+1}C_i = c_i$ (считаем, что $A_{N+1} = A_1$). Хорды B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются в точке A_2, значит, $c_1(a + b_1) = b_2(a + c_2)$, то есть $(c_1 - b_2)a = b_2c_2 - b_1c_1$. Аналогично, $(c_2 - b_3)a = b_3c_3 - b_2c_2$ и т. д. Сложив все эти равенства, получим

$(c_1 + \ldots + c_N - b_1 - \ldots - b_N)a = 0$, то есть $c_1 + \ldots + c_N = b_1 + \ldots + b_N$.

5. [10] Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но при этом у их произведения модули всех коэффициентов не больше 1?

Ответ. Существуют.

Первое решение. Назовём *хорошим* многочлен, у которого все коэффициенты равны 0 или 1. Заметим, что произведение хорошего многочлена степени n на многочлен $x^m + 1$, где $m > n$, снова является хорошим многочленом. Начав с многочлена $x + 1$ и домножив его таким образом на 2019 многочленов вида $x^m + 1$ с нечётным m, мы получим хороший многочлен $f(x)$, делящийся на многочлен $(x + 1)^{2020}$. Тогда $f(x) = (x^{2020} + 2020x^{2019} + \ldots +1)(x^k + ax^{k-1} + \ldots +1)$. Второй коэффициент многочлена $f(x)$ равен $2020 + a$, и он не больше 1, поэтому $a \le -2019$.

Второе решение. Рассмотрим многочлен 18-й степени
$h(x) = (x + 1)^4(x^2 + x + 1)(x^4 + \ldots + 1)(x^8 + \ldots + 1)$ и многочлен $g(x) = h(x)(x^{18} + \ldots +1)$. Легко видеть, что коэффициент при x^{18} многочлена $g(x)$ равен сумме коэффициентов многочлена $h(x)$, то есть $h(1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 = 2160 > 2015$.

Произведение $g(x)g(-x) = (1 - x^6)(1 - x^{10})(1 - x^{18})(1 - x^{38})$ по тем же соображениям, что и в первом решении, будет иметь коэффициенты, по модулю не превышающие единицы.

Замечание. Второе решение даёт всего лишь 36-ю степень множителей, в то время как в первом решении степень одного множителя равна 2020, а второго – гораздо больше.

6. [10] Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император – нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

Решение. *Первый этап*. Император выделяет одного волшебника A и спрашивает всех оставшихся, добрый ли он (а его – о чём угодно). Имеем два случая.

1) Все сказали «нет». Тогда император изгоняет A. Если оказалось, что A – добрый, то все остальные волшебники – злые, и император изгоняет их по очереди, задавая произвольные вопросы.

Если оказалось, что A – злой, то число злых волшебников уменьшилось, и император снова повторяет первый этап.

2) Нашелся волшебник B, сказавший «да». Тогда император изгоняет B. Если оказалось, что B – злой, то император также возвращается к первому этапу. Если оказалось, что B – добрый, то император понимает, что A – добрый и переходит ко второму этапу.

Второй этап. Император ставит волшебников по кругу и спрашивает каждого, добрый ли следующий. Если все ответили «да», то все оставшиеся в зале волшебники – добрые, и император останавливается.

Если кто-то ответил «нет», то первый, начиная со следующего за A волшебника, про которого так сказали, – злой. Император его изгоняет и возвращается ко второму этапу.

7. [10] Как известно, если у четырёхугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырёхугольник – квадрат. А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид – куб? (Кубоид – это многогранник, у которого 6 четырёхугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра.)

Ответ. Не верен. **Решение**. Приведём *контрпример*. На рис. 1 изображен кубоид, построенный следующим образом. Верхняя и нижняя его грани – прямоугольники 6×8 (вписанные в окружность радиуса 5), повёрнутые друг относительно друга на 90°. Линия, соединяющая их центры, перпендикулярна плоскостям прямоугольников и имеет длину $4\sqrt{3}$ (значит, радиус описанной сферы равен $\sqrt{12+5^2}=\sqrt{37}$). Боковые грани – равносторонние трапеции с основаниями длины 6 и 8 и высотой длины 7 (боковая сторона равна $\sqrt{50}$). Проекция боковой стороны этой трапеции на вертикаль как раз равна $\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$. Такая трапеция также вписана в окружность радиуса 5 (см. рис. 2), значит, кубоид описан вокруг сферы радиуса $2\sqrt{3}$.

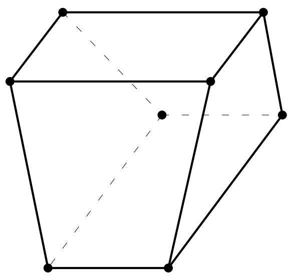


Рис. 1

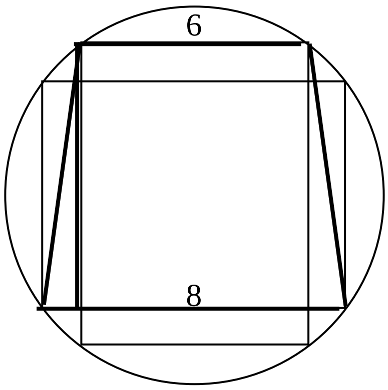


Рис. 2

Решения Л. Медникова, И. Рубанова, А. Семенова, А. Шаповалова

Рисунки А. Семенова