ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что отрезок DE перпендикулярен отрезку, соединяющему середины отрезков AE и BC.
6	2. Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть — внутри. Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошел весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?
	3.
3	а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?
4	б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.
	4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника
4	а) не превосходить девяти;
5	б) не превосходить восьми?
	5.
3	а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.
6	б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?
9	6. Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.
10	7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император в каком хочет порядке задает каждому волшебнику по вопросу (требующему ответа «да» или «нет») и слушает ответ, а после всех ответов одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 15 марта 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
	1.
2	а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?
3	б) Тот же вопрос для натуральных чисел $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$.
5	**2.** На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка X, а на сторонах AB и AC — соответственно точки P и Q таким образом, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно прямой PQ, попадает на описанную окружность треугольника ABC.
	3.
2	а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.
6	б) В таблицу 100×100 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?
8	**4.** Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.
10	**5.** Существуют ли такие два многочлена с целыми коэффициентами, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но при этом у их произведения модули всех коэффициентов не больше 1?
10	**6.** Император пригласил на праздник 2015 волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдает каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. После этого император вновь выдает каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.
10	**7.** Как известно, если у четырехугольника существуют вписанная и описанная окружности и их центры совпадают, то этот четырехугольник — квадрат. А верен ли аналог этого утверждения в пространстве: если у кубоида существуют вписанная и описанная сферы и их центры совпадают, то этот кубоид — куб? (Кубоид — это многогранник, у которого 6 четырехугольных граней и в каждой вершине сходится 3 ребра).