Осенний тур.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ
ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 классы, **базовый вариант** 11 *октября* 2015 *г.*

1. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22 (каждое число ровно один раз). Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

Ответ. Десять дробей, например: $\frac{4}{2}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{15}{5}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{21}{3}, \frac{22}{11}, \frac{13}{1}$.

Решение. Покажем, что больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя. Рассмотрим простые числа 13, 17 и 19. Они могут дать целое число только при делении на 1. Поэтому даже если одно из чисел 13, 17 и 19 поделено на 1, то оставшиеся два «испортят» по крайней мере одну дробь. Всего же дробей 11. Следовательно, больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя.

2. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

Ответ. Да, верно.

Решение 1 (предложено Ермаковой Алиной, гимназия №50 г.Минска). 1) Каждое натуральное число может начинаться с цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Тогда, чтобы после умножения чисел на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5, первая цифра первого множителя (вторым множителем является одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5) при умножении на второй множитель должна давать число, начинающееся с 1.

2) Рассмотрим все возможные варианты. Если первой цифрой первого множителя является:

► 1, то при умножении этого числа на 1, число не изменится $\Rightarrow$ результат будет начинаться с 1.

Пример: $199 \times 1 = 199$

► 2, то при умножении этого числа на 5, результат будет начинаться с 1. Так как какая бы цифра не стояла после 2, запомнить число большее 4 нельзя ($5 \times 9 = 45$, пять пишем, четыре запоминаем. Тогда $5 \times 2 = 10$ и $10 + 4 = 14 \Rightarrow$ Результат начинается с 1).

Пример: $299 \times 5 = 1495$

► 3, то при умножении этого числа на 4, результат будет начинаться с 1 ($3 \times 4 = 12$). Так как какая бы цифра не стояла после 3, запомнить число большее 3 нельзя ($4 \times 9 = 36$, шесть пишем, три запоминаем. Тогда $3 \times 4 = 12$, а $12 + 3 = 15 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $399 \times 4 = 1596$

► 4, то при умножении этого числа на 4, результат будет начинаться с 1 ($4 \times 4 = 16$). Так как какая бы цифра не стояла после 4, запомнить число большее 3 нельзя ($4 \times 9 = 36$. Тогда $4 \times 4 = 16$ и $16 + 3 = 19 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $499 \times 4 = 1996$

► 5, то при умножении этого числа на 2, результат будет начинаться с 1 ($5 \times 2 = 10$). Так как запомнить число большее 1 нельзя ($2 \times 9 = 18$, тогда $5 \times 2 = 10$ и $10 + 1 = 11 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $599 \times 2 = 1198$

► 6, то при умножении этого числа на 2, результат будет начинаться с 1. Так как запомнить число большее 1 нельзя, какая бы цифра не стояла после 6 ($2 \times 9 = 18$, тогда $2 \times 6 = 12$ и $12 + 1 = 13 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $699 \times 2 = 1398$

► 7, то при умножении этого числа на 2, результат будет начинаться с 1. Так как запомнить число большее 1 нельзя, какая бы цифра не стояла после 7 ($2 \times 9 = 18$, тогда $2 \times 7 = 14$ и $14 + 1 = 15 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $799 \times 2 = 1598$

► 8, то при умножении этого числа на 2, результат будет начинаться с 1. Так как запомнить число большее 1 нельзя, какая бы цифра не стояла после 8 ($2 \times 9 = 18$, тогда $2 \times 8 = 16$ и $16 + 1 = 17 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $899 \times 2 = 1798$

► 9, то при умножении этого числа на 2, результат будет начинаться с 1. Так как запомнить число большее 1 нельзя, какая бы цифра не стояла после 9 ($2 \times 9 = 18$, тогда $2 \times 9 = 18$ и $18 + 1 = 19 < 20 \Rightarrow$ результат начинается с 1).

Пример: $99999 \times 2 = 199998$

Что и требовалось доказать.

Решение 2. Пусть p-произвольное k-значное натуральное число (т. е. содержит цифр k). Для обоснования утверждения, предлагаемого в условии задачи, рассмотрим следующие случаи.

1) p начинается с 1 (т. е. первой цифрой слева является 1). При умножении такого числа на 1 результат тоже начинается с 1.

2) p начинается с 2 или 3. Тогда для p справедлива такая оценка:

$$200\ldots0 \le p < 400\ldots0$$

(слева и справа в неравенствах стоят числа, содержащего по (k-1) нулей), т. е.

$$2\cdot10^{k-1} \le p < 4\cdot10^{k-1}.$$

Умножим это двойное неравенство на 5:

$$1\cdot10^{k} = 10\cdot10^{k-1} \le 5p < 20\cdot10^{k-1} = 2\cdot10^{k},$$

т. е. 5р начинается с 1.

3) p начинается с 4 или 5, тогда аналогично предыдущему:

$$4\cdot10^{k-1} \le p < 6\cdot10^{k-1},$$

умножим эти неравенства на 3:

$$12\cdot10^{k-1} \le 3p < 18\cdot10^{k-1}.$$

Ясно, что $3p$ начинается с 1.

4) p начинается с одной из цифр 6, 7, 8 или 9. Тогда

$$6 \cdot 10^{k-1} \le p < 10 \cdot 10^{k-1},$$

умножим эти неравенства на 2:

$$12 \cdot 10^{k-1} \le 2p < 20 \cdot 10^{k-1}.$$

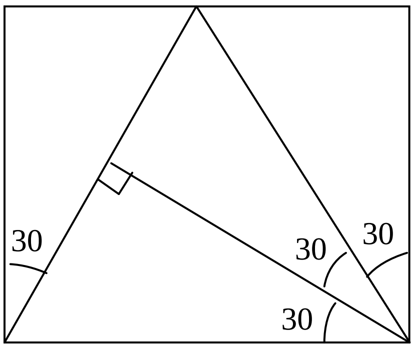
Ясно, что $2p$ начинается с1.

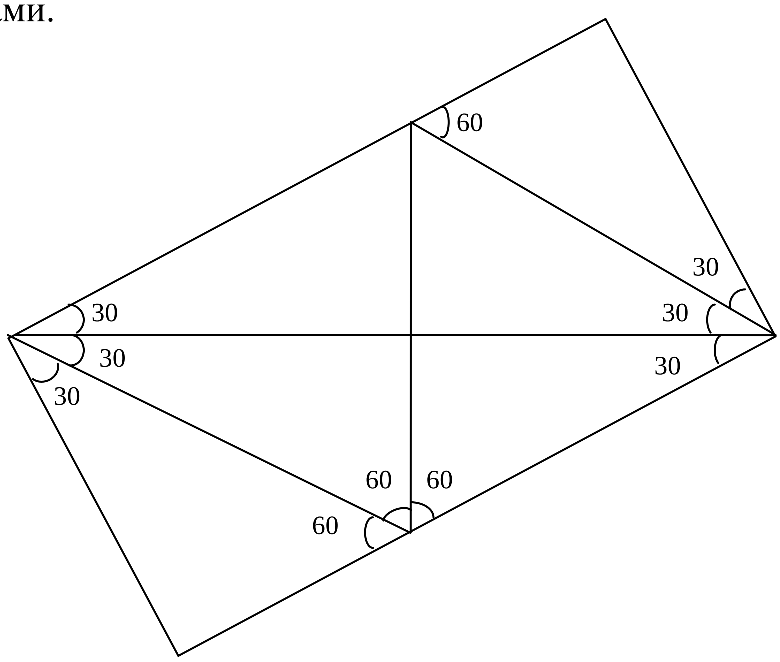
Описанные случаи исчерпывают все возможные варианты для k-значений и их натуральных чисел (k - любое натуральное число).

3. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

Ответ: необязательно.

Решение. Ниже представлены некоторые из возможных рисунков (конструкций) найденных школьниками.





4. В однокруговом шахматном турнире участвовало 15 человек. Каждый из участников сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. За победу присуждается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков. Могут ли четыре участника набрать в сумме больше очков, чем все остальные вместе?

Ответ: не могут.

Решение. Рассмотрим крайний случай, когда четыре первых (лучших) участника наберут максимальное количество очков во всех их партиях (при этом сразу получим ответ – либо «да» (если будет больше очков, чем у всех остальных участников), либо «нет» (в противном случае)).

В играх между собой четыре лучших участника наберут 6 очков (всего между ними $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ партий). В играх с остальными 11 участниками они наберут максимум $4\cdot 11=44$ очка итого: 6 + 44 = 50 очков. Всего же в турнире будет разыграно 105 очков $\left(\frac{15\cdot 14}{2}=15\cdot 7=105\right)$, т.е. остальные участники все равно наберут больше очков – 55.

5. В стране n городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелет из А в Б стоит столько же, сколько перелет из Б в А. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

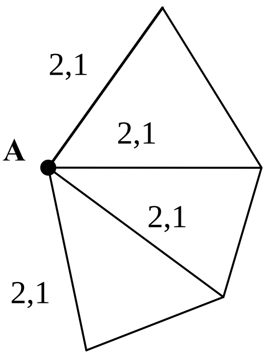
а) $n=5,\ m=4;$

б) $n=5,\ m=5;$

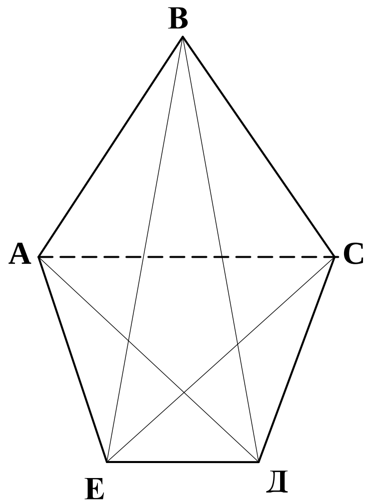
в) $n=100;\ m=99$?

Ответ: а) не всегда; б) всегда; в) не всегда.

Решение. А) Ответ «не всегда» предполагает наличие примера стоимостей перелетов между городами (или описание такой конструкции), при котором как бы путешественник не совершал «облеты», общая стоимость будет больше 4 тугриков.



Пусть родной город путешественника А, и все перелеты из его города являются дорогими (например, 2,1 тугрика, как указано на рисунке). Учитывая, что всего авиа маршрутов 10, и суммарная стоимость всех перелетов тоже 10 (ибо средняя стоимость 1 тугрик), то на оставшиеся 6 авиамаршрутов осталось еще $10-4\cdot 2{,}1=1{,}6$ тугрика. Пусть каждый из них стоит ${}^{1,6}\!/_{6}={}^{0,8}\!/_{3}$ тугрика. Поскольку путешественнику по всякому потребуется вылететь из А и вернуться в него, то общая стоимость его перелета больше 4,2 тугрика.



Б) Ответ «всегда» предполагает доказательство того, что как бы не стоили перелеты, путешественник всегда выберет маршрут, стоимость которого не превосходит 5 тугриков. Рассмотрим два замкнутых маршрута: АВСДЕА (по периметру пятиугольника, см. рис.2) и по диагоналям: АСЕВДА (звездчатый пятиугольник). Эти маршруты вместе включают все 10 авиамаршрутов между городами, и их общая стоимость равна 10 тугриков. Ясно, что один из этих маршрутов стоит не более 5 тугриков (иначе сумма обоих была бы больше 10).

В) Аналогично пункту а) построим пример, в котором перелеты из А самые дорогие и уже два из них стоят 99 тугриков, а оставшиеся перелеты будут стоить одинаково и очень мало.

Всего в стране $\frac{100\cdot 99}{2}=99\cdot 50=4950$ авиамаршрутов и это число совпадает с общей стоимостью всех перелетов.

Если теперь взять стоимость всех перелетов из А одинаковыми и равными 49,55 тугриков, то любой маршрут путешественника будет стоить больше, чем $49,55\cdot 2=99,1$ тугрик. В тоже время на оставшиеся $4950-99=4851$ перелет еще осталось $4950-(49,55\cdot 99)=4950-4905,45=44,55$ тугрика, т.е. каждый из них может стоить $\frac{44,55}{4851}$ тугрик (конечно, очень дешевые, но все же положительные по стоимости перелеты).