Еще одно решение задачи №3 базового варианта 8-9 и 10-11 классов

3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Решение (доказательство). Запишем возможные варианты распределения элементов в раундах, количество таких раундов (т. е. раундов с указанным распределением) и количество баллов в таких раундах в виде таблицы:

Количество элементов в раунде			Количество таких раундов	Количество баллов в таких раундах
камень	ножницы	бумага		
2	1	0	x	2
1	2	0	y	1
2	0	1	z	1
1	0	2	t	2
0	2	1	u	2
0	1	2	v	1
3	0	0	α	0
0	3	0	β	0
0	0	3	γ	0
1	1	1	δ	0

Запишем число «показаний» каждого элемента при таких количествах раундов:

камни: $2x+y+2z+t+3\alpha+\delta$

ножницы: $x+2y+2u+v+3\beta+\delta$

бумага: $z+2t+u+2v+3\gamma+\delta.$

Пусть какие-то два из этих чисел равны (например «камни» = «ножницы», этого оказывается достаточным):

$$2x+y+2z+t+3\alpha+\delta=x+2y+2u+v+3\beta+\delta,$$

т. е. $x-y+2z+t-2u-v+3(\alpha-\beta)=0$, или $x=y-2z-t+2u+v-3(\alpha-\beta)$, (*)

а число набранных баллов при этом равно

$$2x+y+z+2t+2u+v=\text{(заменим } x \text{ из выражений (*))}=$$
$$=2\big(y-2z-t+2u+v-3(\alpha-\beta)\big)+y+z+2t+2u+v=$$
$$=3y-3z+6u+3v-6(\alpha-\beta)$$

и, очевидно, делится на 3.