Осенний тур. ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 классы, сложный вариант 25 октября 2015 г.

1. На базаре продаются раки, большие и маленькие. Сегодня три больших рака и один маленький стоят вместе столько, сколько пять больших стоили вчера, а два больших и один маленький сегодня – столько же, сколько три больших и один маленький вчера. Можно ли по этим данным определить, что дороже: один большой и два маленьких рака сегодня или пять маленьких вчера?

Ответ: одинаково.

Первое решение. Обозначим вчерашние цены большой и маленькой рыбок через b_1 и m_1, соответственно, а сегодняшние - b_2 и m_2. Тогда по условию задачи

$$3b_2 + m_2 = 5b_1,$$
$$2b_2 + m_2 = 3b_1 + m_1.$$

Выражая b_2 и m_2 через b_1 и m_1, получим

$$b_2 = 2b_1 - m_1,$$
$$m_2 = 3m_1 - b_1,$$

откуда $b_2 + 2m_2 = (2b_1 - m_1) + 2(3m_1 - b_1) = 5m_1.$

Значит, одна большая и две маленькие рыбки сегодня стоят столько же, сколько пять маленьких вчера.

Второе решение. Условие задачи можно записать и так (ср. первое решение)

	Вчера				Сегодня		
1)	5 больших	+	0 маленьких	=	3 больших	+	1 маленький
2)	3 больших	+	1 маленьких	=	2 больших	+	1 маленький

Для решения теперь достаточно заметить, что если 2-ю строчку умножить на 5 и из нее вычесть утроенную 1-ю строчку, то сразу получаем

5 маленьких = 1 большой + 2 маленьких

Вчера Сегодня

2. а) Можно ли записать числа от 1 до 16 по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа?

б) Можно ли записать числа от 1 до 16 в строку с соблюдением того же условия?

Ответ: а) нет, б) да, пример см. в решении.

Решение. Для облегчения поиска расположения чисел по кругу или в строку для каждого натурального числа от 1 до 16 выпишем такие числа, в сумме с которыми они образуют квадрат натурального числа:

1 – 3, 8, 15;	9 – 7, 16;
2 – 7, 14;	10 – 6, 15;
3 – 1, 6, 13;	11 – 5, 14;
4 – 5, 12;	12 – 4, 13;
5 – 4, 11;	13 – 3, 12;
6 – 3, 10;	14 – 2, 11;
7 – 2, 9;	15 – 1, 12;
8 – 1;	16 – 9.

Как видим, для двух чисел – для 8 и 16, существует лишь одно число, в сумме с которым получается квадрат натурального числа.

В то же время для требуемого расположения по кругу нужно два таких числа (одно будет идти перед ним, а второе - после). Поэтому требуемого расположения чисел по кругу не существует.

Эти же рассуждения помогают понять, что при расположении в строку одно из чисел 16 или 8 должно быть самым первым, а второе – последним. Требуемое расположение далее выписывается однозначно:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

3. Из спичек сложен клетчатый квадрат

а) 2×2;

б) 6×6,

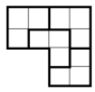
сторона каждой клетки которого одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Ответ: в обеих пунктах а) и б) выигрывает второй игрок.

Решение. Стратегия второго игрока должна быть основана на центральной симметрии относительно центра квадрата: пока у первого игрока есть ход, есть ход и у второго.

Примечание. Если длины сторон квадрата – нечетные числа, то решение значительно сложнее, для случая 9×9 см. задачу №4 из варианта для 8-9 класса.

4. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить многоугольник такой же формы. Например, уголок из трёх клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка).



а) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток;

б) Придумайте выдающийся многоугольник из 37 клеток.

Решение. Решение см. задачу №1 из варианта для 8-9 класса.

5. В числе 1011001110001111 0000… девяносто цифр. Верно ли, что это число делится на 48^2?

Ответ: да.

Решение. Так как цифры в числе идут группами, содержащими равное количество нулей и единиц, причем первая группа состоит из двух цифр, вторая – из четырех и т. д. и, кроме того, $2+4+6+\ldots+18=90$, то последней группой будет группа, состоящая из 9 единиц и 9 нулей. Таким образом, число заканчивается девятью нулями и, следовательно, делится на 2^9. Число содержит также ровно 45 единиц и, следовательно, делится на 9. Поэтому оно делится и на $9\cdot 2^8=\left(3\cdot 2^4\right)^2=48^2$.

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «±», а также обычные знаки «+», «–», «×» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «±» либо «+», либо «–» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были написаны числа 4 и 6, то подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение (2 ± 0,5) ± 0,5. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) 1, 2, 3, 4, 5;

б) 1, 2, 4, 8, 16?

Ответ: а) да; б) да.

Решение. а) $\left(\left(\left((3\pm 0{,}5)\pm 0{,}5\right)\pm 0{,}5\right)\pm 0{,}5\right)$

б) $(1{,}5\pm 0{,}5)\times(1{,}5\pm 0{,}5)\times(1{,}5\pm 0{,}5)\times(1{,}5\pm 0{,}5)$.

Примечание. Ответ является положительным и в общем случае, но конструкция для него достаточно сложна, см. решение задачи №6 из варианта для 8-9 класса.

7. Из целых чисел от 1 до 100 удалили *k* чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать *k* различных чисел с суммой 100, если

а) k=9;

б) k=8?

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. См. задачу №2 из варианта для 8-9 класса.