Осенний тур. 37-й Международный математический турнир городов

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

6-7 кл., базовый вариант 11 *октября* 2015 *г.*

Баллы *Задачи*

4 1. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22 (каждое число ровно один раз). Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

4 2. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

3. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно
5 ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

4. В однокруговом шахматном турнире участвовало 15 человек. Каждый из участников сыграл ровно одну партию с каждым из осталь-
5 ных. За победу присуждается 1 очко, за ничью – 0,5 очков, за поражение – 0 очков. Могут ли четыре участника набрать в сумме больше очков, чем все остальные вместе?

5. В стране n городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелет из А в Б стоит столько же, сколько перелет из Б в А. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

2 а) $n = 5$, $m=4$;
2 б) $n = 5$, $m=5$;
3 в) $n=100$; $m = 99$?

8-9 кл., базовый вариант 11 *октября* 2015 *г.*

Баллы *Задачи*

4 1. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

2. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-
4 то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

5 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK =$
5 $BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелет из А в Б стоит столько же, сколько перелет из Б в А. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в сво-
3 ем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если: а) $m = 99$;
3 б) $m = 100$?

10-11 кл., базовый вариант 11 *октября* 2015 *г.*

Баллы *Задачи*

3 1. Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p + n$?

2. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну
4 сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса в треугольнике ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD.

4 3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

4. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелет из А в Б стоит столько же, сколько перелет из Б в А. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если:

2 а) $m = 99$;
2 б) $m = 100$?

5. Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой
5 последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?