ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

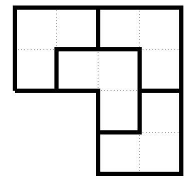
Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).



2 а) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

3 б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

2 а) $k = 9$;

4 б) $k = 8$?

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

3 а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;

5 б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

8 4. Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

8 5. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

3 а) числа 1, 2, 4;

7 б) любые 100 различных действительных чисел?

10 7. У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.
6	2.	Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.
6	3.	Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше, чем 1/2016.
7	4.	Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна 180°.
	5.	Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2\pm0,5)\pm0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны
2	а)	числа 1, 2, 4;
6	б)	любые 100 различных действительных чисел?
	6.	Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если
6	а)	$h=17$ см;
6	б)	$h=18$ см?
12	7.	Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.