ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.
	2.	Существуют ли такие целые числа a и b, что
2	а)	уравнение $x^2+ax+b=0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2]+ax+b=0$ имеет?
3	б)	уравнение $x^2+2ax+b=0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2]+2ax+b=0$ имеет? (Знаком $[k]$ обозначается целая часть числа k, то есть наибольшее целое число, не превосходящее k.)
6	3.	Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.
8	4.	Художник-абстракционист взял деревянный куб $5\times5\times5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов — чёрный, белый или красный — так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)
8	5.	Пусть p — простое число, большее 10^k. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A, — и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.
9	6.	Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?
	7.	
5	а)	Есть $2n+1$ батареек ($n>2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
5	б)	Та же задача, но батареек $2n$ ($n>2$), причём хороших и плохих поровну.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.
5	2. Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.
6	3. Пусть M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$.
8	4. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.
8	5. На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. (Многочлен называется приведённым, если его старший коэффициент равен 1.) Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на любые два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, такие что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.
	6. Напомним, что палиндром — это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево.
4	а) Есть неограниченный набор карточек со словами «abc», «bca», «cab». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?
6	б) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «abc», «bca», «cab» и синих карточек со словами «cba», «acb», «bac». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек?
	7. На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях:
4	а) $N = 3$;
6	б) $N = 4$.