ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

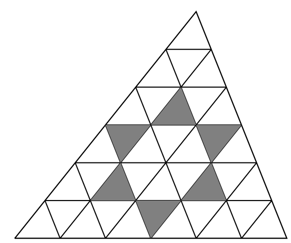
5 1. Десяти ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине всем другим детям. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин?

Николай Чернятьев

5 2. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.)

Николай Чернятьев

6 3. Произвольный треугольник разрезали на равные треугольники прямыми, параллельными сторонам (как показано на рисунке). Докажите, что ортоцентры шести закрашенных треугольников лежат на одной окружности. (Ортоцентр треугольника — точка пересечения его высот.)



Егор Бакаев

8 4. Квадратная коробка конфет разбита на 49 равных квадратных ячеек. В каждой ячейке лежит шоколадная конфета — либо чёрная, либо белая. Саша может съесть две конфеты, если они одного цвета и лежат в соседних по стороне или по углу ячейках. Какое наибольшее количество конфет гарантированно может съесть Саша, как бы ни лежали конфеты в коробке?

Александр Кузнецов

8 5. На трёх красных и трёх синих карточках написаны шесть положительных чисел, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то трёх чисел, а на карточках другого цвета — попарные произведения тех же трёх чисел. Всегда ли можно гарантированно определить эти три числа?

Борис Френкин

9 6. Дан правильный $2n$-угольник $A_1A_2\dots A_{2n}$ с центром O, причём $n \geq 5$. Диагонали A_2A_{n-1} и A_3A_n пересекаются в точке F, а A_1A_3 и A_2A_{2n-2} — в точке P. Докажите, что $PF = PO$.

Максим Тимохин

7.

5 а) Группа людей прошла опрос, состоящий из 20 вопросов, на каждый из которых возможно два ответа. После опроса оказалось, что для любых 10 вопросов и любой комбинации ответов на эти вопросы существует человек, давший именно эти ответы на эти вопросы. Обязательно ли найдутся два человека, у которых ответы ни на один вопрос не совпали?

6 б) Решите ту же задачу, если на каждый вопрос есть 12 вариантов ответа.

Иван Митрофанов, Алексей Канель-Белов

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
5	1. 100 ребятам положили в тарелки по 100 макаронин. Есть ребята не хотели и стали играть. Одним действием кто-то из детей перекладывает из своей тарелки по одной макаронине некоторым (кому хочет) из остальных. После какого наименьшего количества действий у всех в тарелках может оказаться разное количество макаронин? *жюри Турнира городов по задаче Николая Чернятьева*
5	2. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошкой называется прямоугольник, состоящий из двух клеток.) *Николай Чернятьев*
7	3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причём O не лежит на диагоналях четырёхугольника. Окружность, описанная около треугольника AOC, проходит через середину диагонали BD. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BOD, проходит через середину диагонали AC. *Алексей Заславский*
8	4. На 2016 красных и 2016 синих карточках написаны положительные числа, все они различны. Известно, что на карточках какого-то одного цвета написаны попарные суммы каких-то 64 чисел, а на карточках другого цвета — попарные произведения тех же 64 чисел. Всегда ли можно определить, на карточках какого цвета написаны попарные суммы? *Борис Френкин*
9	5. Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на две части и покрыть ими какой-нибудь круг диаметра больше 1? *Александр Шаповалов*
9	6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя задумывает некоторый многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Далее делается несколько ходов. За ход Вася платит Пете рубль и называет любое целое число a по своему выбору, которое он ещё не называл, а Петя в ответ говорит, сколько решений в целых числах имеет уравнение $P(x) = a$. Вася выигрывает, как только Петя два раза (не обязательно подряд) назвал одно и то же число. Какого наименьшего числа рублей хватит Васе, чтобы гарантированно выиграть? *Anant Mudgal (Индия)*
12	7. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причем они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же. *Фёдор Петров*