38-й Международный математический Турнир городов

2016/17 учебный год

Решения задач

Базовый вариант

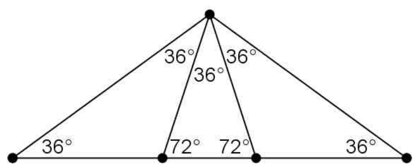
Младшие классы

1. [4] Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами? (*М. Евдокимов*)

Ответ. Не могло. **Решение 1**. Пусть взяли x чётных чисел и y нечётных $(x + y = 5)$. Тогда нечётных сумм оказалось xy. Если бы все суммы оканчивались разными цифрами, то xy было бы равно 5, тогда $x + y$ должно было бы равняться 6.

Решение 2. Рассмотрим сумму S полученных десяти сумм. Если эти суммы оканчиваются на десять разных цифр, то число S нечётно. Но каждое из исходных пяти чисел входит в четыре суммы, поэтому число S чётно. Противоречие.

2. [4] На прямой отмечено четыре точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует шесть треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? (*Е. Бакаев*)



Ответ. Все шесть. **Решение**. Возьмём равнобедренный треугольник с углом 108°. Поделим этот угол на три равных (см. рис.). Образовавшиеся шесть треугольников будут, очевидно, равнобедренными.

Замечание. Пример единственен.

3. На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

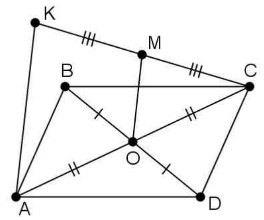
а) [2] Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

б) [2] Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными? (*П. Кожевников*)

а) Решение. Найдутся две соседние точки с номерами разной чётности. Соединим их и мысленно удалим. Из оставшихся точек снова можно выбрать две соседние и т.д. В итоге все точки разобьются на нужные пары.

б) Ответ. Неверно. **Решение**. Занумеруем точки в естественном порядке. Отрезок, соединяющий два числа одной чётности, разобьёт оставшиеся точки на две нечётные кучки, которые на пары уже не разбить.

4. [5] Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$. (*Е. Бакаев*)



Решение. Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK ($OM = ½AK$ и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны $BD = AK$. Значит, угол BMD прямой.

Замечание. Если $AK \parallel BD$, то треугольник BMD вырождается и угол BMD не имеет смысла.

5. [5] Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса? (*Е. Бакаев*)

Ответ. 100 ягод. **Решение**. Заметим, что на каждом шаге, если оба участвующих медвежонка имели хотя бы по ягоде, то у них по крайней мере по ягоде останется. Поэтому в конце у каждого медвежонка останется не меньше одной ягоды.

Докажем, что лиса может оставить каждому медвежонку ровно по одной ягоде, то есть перейти из позиции $(1, 2, ..., 2^{99})$ в позицию $(1, 1, ..., 1)$.

Для этого докажем по индукции, что в случае n медвежат лиса из позиции $(1, 2, ..., 2^{n-1})$ может перейти в позицию $(1, 1, ..., 1, 2^{n-1})$, а из последней – в позицию $(1, 1, ..., 1)$.

База: при $n = 1$ все три позиции совпадают.

Шаг индукции. Из позиции $(1, 2, ... , 2^{n-1}, 2^n)$, забыв про последнего медвежонка, можно по предположению индукции перейти сначала в $(1, 1, ... 1, 2^{n-1}, 2^n)$, а потом в $(1, 1, ... 1, 2^n)$. Задействовав последних двух медвежат, лиса переходит в позицию $(1, 1, ... 1, 2^{n-1}, 2^{n-1})$. Теперь, снова забыв про последнего медвежонка, можно перейти в позицию $(1, 1, ..., 1, 2^{n-1})$, а из неё, забыв про первого, – в позицию $(1, 1, ..., 1)$

Старшие классы

1. [4] Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$? (*Н. Седракян*)

Ответ. 0. **Решение 1**. Пусть вершины парабол – точки (a, b) и (c, d) соответственно. Тогда уравнения парабол: $y = p(x - a)^2 + b$ и $y = q(x - c)^2 + d$. Принадлежность вершин записывается условиями: $d = p(c - a)^2 + b$ и $b = q(a - c)^2 + d$. Складывая их и сокращая, получим $(p + q)(a - c)^2 = 0$. Если $a = c$, то и $b = d$, а вершины различны. Поэтому $p + q = 0$.

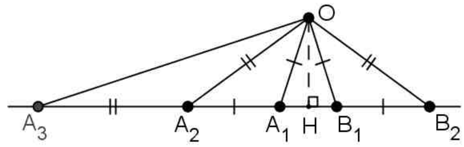
Решение 2. Пусть A и B – вершины парабол. Рассмотрим третью параболу, симметричную первой относительно середины отрезка AB. Она имеет вершину B и содержит точку A. Поскольку парабола *однозначно определяется своей вершиной и ещё одной точкой*, третья парабола совпадает со второй. Значит, старшие коэффициенты исходных парабол отличаются только знаком.

2. [5] На прямой отмечено 100 точек, и ещё одна точка отмечена вне прямой. Рассмотрим все треугольники с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными? (*Е. Бакаев*)

Ответ. 150. **Решение**. Пусть l – данная прямая, O – отмеченная точка вне её, H – основание перпендикуляра, опущенного из O на l.

Оценка. Основание равнобедренного треугольника может лежать на l или не лежать. Рассматриваемые треугольники первого вида симметричны относительно OH, поэтому их не больше 50 – половины отмеченных точек на l. Треугольников второго вида с данным основанием OA может быть не более одного, так как вершина определяется пересечением l и серединного перпендикуляра к OA. Поэтому треугольников второго вида не больше 100.

Пример 1. Отложим от луча OH лучи под углом 18°. Они пересекут l в точках A_1 и B_1, отметим их. Отложим на l в другую сторону от A_1B_1 отрезок $A_1A_2 = A_1O$, затем отрезок $A_2A_3 = A_2O$, …, отрезок $A_{49}A_{50} = A_{49}O$. Аналогично отметим точки B_2, …, B_{50}. Равнобедренными будут 50 треугольников OA_iB_i, по 49 треугольников OA_iA_{i+1} и OB_iB_{i+1}, треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2 с углами 72°, 72°, 36°.

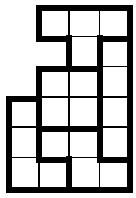


Пример 2. Рассмотрим вершины правильного 101-угольника. Отметим одну из них – O, её соседей – A и B, а для каждой из остальных вершин X отметим её образ X' при инверсии с центром O и радиусом OA. Так как при инверсии треугольники OXY и $OY'X'$ подобны, то количество равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках равно количеству равнобедренных треугольников вида OXY, где X и Y – вершины 101-угольника. А таких треугольников, как нетрудно заметить, именно 150.

3. [5] Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше – 2 ягоды, следующий – 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наибольшее количество ягод может съесть лиса? (*Е. Бакаев*)

Ответ. $2^{100} - 101$. См. решение задачи 5 младших классов.

4. [5] Петя нарисовал многоугольник площадью 100 клеток, проводя границы по линиям квадратной сетки. Он проверил, что его можно разрезать по границам клеток и на два равных многоугольника, и на 25 равных многоугольников. Обязательно ли тогда его можно разрезать по границам клеток и на 50 равных многоугольников? (*Е. Бакаев*)



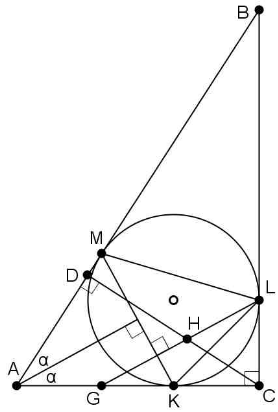
Ответ. Обязательно. **Решение**. 25 равных многоугольников содержат по четыре клетки, то есть образуют тетрамино. Есть пять видов тетрамино – в форме букв O, I, L, Z и T (см. рис.). Каждое тетрамино, кроме T, можно разрезать на доминошки, получив 50 равных многоугольников.

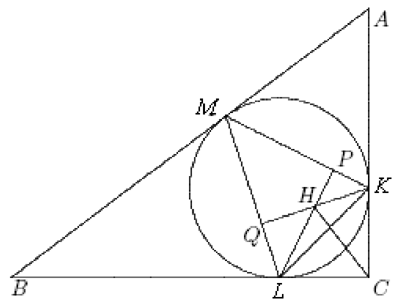
Предположим, что использовалось T-тетрамино. Раскрасим клетки Петиного многоугольника в шахматном порядке и подсчитаем разность D количеств чёрных и белых клеток. Пусть в одном из 50-клеточных многоугольников такая разность равна d. Поскольку чётность разности чисел совпадает с чётностью их суммы, число d чётно. При наложении равных многоугольников цвета клеток не меняются или меняются все. Поэтому во втором 50-клеточном многоугольнике разность равна $\pm d$. Значит, D делится на 4. Но в каждом T-тетрамино исследуемая разность равна ± 2, следовательно, $D \equiv 25 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 4$. Противоречие.

5. [6] Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведённой из прямого угла. (*А. Заславский*)

Решение 1. Пусть окружность касается катетов AC, BC и гипотенузы AB треугольника ABC в точках K, L и M, CD – его высота, $\angle A = 2\alpha$; высота треугольника KLM, опущенная на сторону KM, пересекает CD и AC в точках H и G соответственно (рис. слева). Заметим, что прямая LG параллельна биссектрисе угла A. Значит, $\angle LGC = \alpha$, $\angle CLG = 90° - \alpha$. Поскольку $\angle BCD = 2\alpha$, то $\angle CHL = 90° - \alpha$, то есть треугольник LCH – равнобедренный, и $CH = CL = CK$.

Повторив аналогичные вычисления для высоты треугольника KLM, опущенной на сторону LM, получим, что она проходит через ту же точку H, которая, следовательно, и является ортоцентром треугольника KLM.





Решение 2. Сохраним обозначения решения 1, но здесь H – ортоцентр, а KQ и LP – высоты треугольника KLM (рис. справа).

Заметим, что $\angle AMK = \angle AKM = 90° - \alpha$, $\angle BML = \angle BLM = 90° - (45° - \alpha) = 45° + \alpha$. поэтому $\angle LMK = 180° - \angle AMK - \angle BML = 45°$. Значит, $\angle MLP = 45°$, $\angle LHQ = 45°$, а $\angle LHK = 135°$. Поскольку $CK = CL$, а $\angle LHK = 2(180° - \angle LHK)$, то точка H лежит на окружности радиуса CK с центром C.

Следовательно, треугольник HLC равнобедренный, и
$\angle LCH = 180° - 2\angle CLH = 180° - 2(180° - 45° - (45° + \alpha)) = 2\alpha$. Это и значит, что $CH \perp AB$.

Решение 3. В обозначениях решения 2, пусть O – центр описанной окружности трегольника KLM (она же – вписанная окружность треугольника ABC). Как известно, в любом треугольнике KLM четырёхугольник $MOO'H$, где O' – точка, симметричная O относительно стороны KL, является параллелограммом (возможно вырожденным). В нашем случае точка O' совпадает с C, поскольку $CKOL$ – квадрат. Значит, $CH \parallel OM \perp AB$, что и требовалось.