38-й Международный математический Турнир городов
Решения задач базового варианта весеннего тура

Младшие классы

1. [3] *Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается (в десятичной записи) на 2016 и делится на 2017.*

Ответ. 20161932.

Решение. Пусть это число n имеет $k + 4$ цифр. Тогда $2016 \cdot 10^k \le n < 2017 \cdot 10^k$. Так как n делится на 2017, то $n \le 2017 \cdot 10^k - 2017$. Следовательно, $2017 \le (2017 - 2016)10^k = 10^k$, то есть $k \ge 4$. Поэтому наименьшее такое число равно $20170000 - 4 \cdot 2017$.

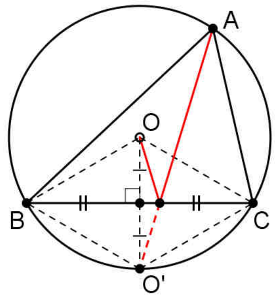
2. [4] *Докажите, что на графике любого квадратного трёхчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдётся такая точка (p, q), что трёхчлен $x^2 + px + q$ также имеет ровно один корень.*

Решение 1. Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет один корень a. Тогда $f(x) = (x - a)^2$. График этого трёхчлена содержит точку $(2a, a^2)$. Трёхчлен $x^2 + 2ax + a^2$ имеет один корень.

Замечание. Есть ещё одна подходящая точка: $\left(\frac{2a}{3}, \frac{a^2}{9}\right)$.

Решение 2. Многочлен $x^2 + px + q$ имеет один корень тогда и только тогда, когда $q = ¼\, p^2$. Поэтому подойдёт любая точка пересечения графика исходного трёхчлена и параболы $y = ¼\, x^2$. А эти графики, очевидно, пересекаются.

3. [5] *Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60°$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.*



Решение. Отразим относительно BC центр O описанной окружности Ω треугольника ABC. Получим точку O'. Так как

$$\angle BO'C = \angle BOC = 2\angle A = 120° = 180° - \angle A,$$

то O' лежит на Ω. Так как O лежит на серединном перпендикуляре к BC, то O' – середина дуги BC. Значит, биссектриса угла A проходит через O'. Это и значит, что после отражения шарик пройдёт через точку O.

4. [5] *В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?*

Решение. Обозначим первые слева 25 мест в ряду буквой A, вторые 25 – B, третьи и четвёртые – C и D. Каждый раз, выбирая 50 детей, будем выстраивать их по убыванию роста. Сделаем это сначала с AB, затем с BC и, наконец, с CD. После первой перестановки 25 самых низких детей окажутся в куске BCD, после второй – в CD, после третьей – в D. Таким образом, 25 самых низких детей уже расставлены правильно. Снова выполним перестановки AB и BC. Они расставят в нужном порядке следующих по росту 25 детей в куске C. Последняя перестановка AB расставит правильно 50 самых высоких.

Замечания. 1. Набор перестановок AB, CD, BC, AB, CD, BC тоже подходит.

2. За пять перестановок обратный порядок детей не перестроить.

5. **а**) [2] *На каждой стороне десятиугольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют* *общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной десятиугольника?*

б) [3] *Решите ту же задачу для одиннадцатиугольника.*

Ответ. **а**) Может. **б**) Не может.

Решение. Наличие общей точки у всех построенных окружностей равносильно существованию точки, из которой каждая сторона многоугольника видна под прямым углом.

а) См. рис.

б) Пусть нашлась требуемая точка O для многоугольника $A_1\ldots A_{11}$. Как показано выше, $OA_1 \perp OA_2 \perp \ldots \perp OA_{11} \perp OA_1$. Следовательно, $OA_1 \parallel OA_3 \parallel \ldots \parallel OA_{11} \parallel OA_2$. Противоречие.

Старшие классы

1. [3] *Дан правильный 12-угольник $A_1A_2\ldots A_{12}$. Можно ли из 12 векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, …, $\overrightarrow{A_{11}A_{12}}$, $\overrightarrow{A_{12}A_1}$ выбрать семь, сумма которых равна нулевому вектору?*

Ответ. Можно.

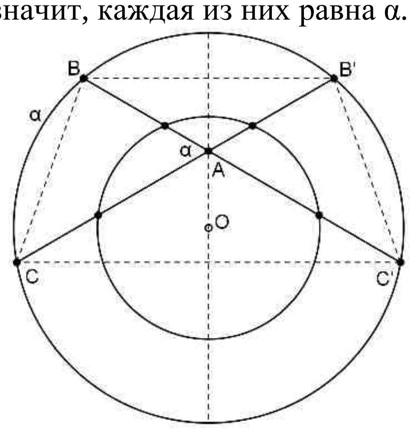
Решение. Отложим векторы, равные данным, из одной точки. Они поделят полный угол при ней на углы по 30°. Возьмём любые три вектора, образующие между собой углы по 120°. Сумма этих векторов нулевая. Среди оставшихся девяти векторов есть три пары противоположных. Добавив две из этих пар векторов к трём выбранным, получим искомую семёрку.

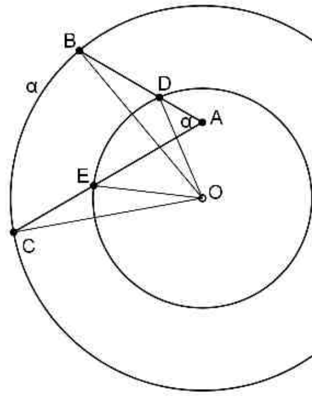
2. [4] *Даны две концентрические окружности и точка A внутри меньшей окружности. Угол величиной α с вершиной в A высекает на этих окружностях по дуге. Докажите, что если дуга большей окружности имеет угловой размер α, то и дуга меньшей имеет угловой размер α.*

Решение. Пусть на большей окружности угол высекает дугу BC.

Первый способ. Обозначим через C' и B' вторые точки пересечения большей окружности с прямыми AB и AC соответственно (рис. слева). Сумма дуг BC и $B'C'$ равна 2α, поэтому эти дуги равны. Значит, $BB'C'C$ – равнобедренная трапеция или прямоугольник.

Ось симметрии этой трапеции проходит через середины оснований, точку A пересечения диагоналей и общий центр O. Следовательно, вся картинка симметрична относительно оси, поэтому углы BAC и $B'AC'$ высекают на меньшей окружности равные дуги. Сумма этих дуг равна 2α, значит, каждая из них равна α.





Второй способ. Так как $\alpha < 180°$, то точки O и A лежат по одну сторону от хорды BC. Значит, углы BOC и BAC одинаково ориентированы. Поэтому при повороте вокруг общего центра O, переводящем B в C, отрезок BA перейдёт в отрезок CX, где X лежит на луче CA внутри меньшей окружности. Следовательно, D перейдёт в E (это точки пересечения соответственно отрезков BA и CA с меньшей окружностью, см. рис. справа). Значит, дуга DE равна α.

3. [5] *В каждую клетку квадрата 1000×1000 вписано число так, что в любом не выходящем за пределы квадрата прямоугольнике площади s со сторонами, проходящими по границам клеток, сумма чисел одна и та же. При каких s числа во всех клетках обязательно будут одинаковы?*

Ответ. Только при $s = 1$.

Решение. Понятно, что при $s = 1$ числа во всех клетках одинаковы.

Пусть $s > 1$ и p – простой делитель s. В клетки, сумма координат которых делится на p, впишем единицы, а в остальные клетки – нули. В любом прямоугольнике T площади s одна из сторон делится на p, поэтому он разбивается на s/p полосок длины p. В каждую такую полоску попадает ровно одна единица. Поэтому сумма чисел в T равна s/p, то есть не зависит от выбора прямоугольника.

4. [5] *По кругу стоят 10 детей разного роста. Время от времени один из них перебегает на другое место (между какими-то двумя детьми). Дети хотят как можно скорее встать по росту в порядке возрастания по часовой стрелке (от самого низкого к самому высокому). Какого наименьшего количества таких перебежек им заведомо хватит, как бы они ни стояли изначально?*

Ответ. 8 перебежек.

Решение. Занумеруем детей по возрастанию роста – 1, 2, …, 10. Пусть изначально они стояли в обратном порядке. Если было меньше восьми перебежек, то какие-то трое детей остались на своих местах, а их порядок противоположен нужному.

Восьми перебежек хватит: 1-й и 2-й остаются на своих местах, 3-й перебегает и встаёт за 2-м, потом 4-й – за 3-м и т.д.

5. [6] *Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают?*

Ответ. Неверно.

Решение 1. Графики $y = \frac{1}{8}(x^2 + 6x - 25)$ и $y = \frac{1}{8}(25 + 6x - x^2)$ имеют оси $x = \pm 3$, а пересекаются при $x = \pm 5$. Произведение тангенсов углов наклона касательных в точках пересечения равно $\frac{1}{64}(2\cdot 5 + 6)(6 - 2\cdot 5) = -1$. Значит, касательные в этих точках перпендикулярны.

Решение 2. Рассмотрим параболу $y = x^2$. Найдём на ней две точки A и B с разными ординатами, в которых касательные a и b перпендикулярны. Отразим параболу относительно середины O отрезка AB. У новой параболы касательная в точке A параллельна b, то есть перпендикулярна a. Аналогична ситуация в точке B. Поскольку точка O не лежит на оси ординат, оси парабол не совпадают.