38-й Международный математический Турнир городов

2016/17 учебный год

Весенний тур

Решения задач

Сложный вариант

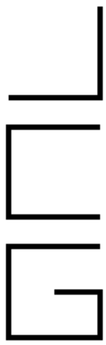
Младшие классы

1. [5] В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причём не меньше чем в половине всех игр участники были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре хоть одна игра была между земляками.

Решение. Предположим, что каждый участник сыграл меньше половины своих игр с земляками. Просуммируем количества таких игр у всех участников и разделим на 2. Мы получим, что меньше половины всех игр на турнире были между земляками, что противоречит условию. Значит, хотя бы один участник сыграл не меньше половины своих игр с земляками. Так как он всего сыграл 9 игр, то шахматистов из его города (включая его самого) не меньше шести. Значит, в каждом туре была игра между участниками из этого города.

Замечание. Если из какого-то города ровно шесть шахматистов, то уже они сыграют 24 партии с неземляками, что больше половины всех игр. Значит, участников из одного города не меньше семи, а потому в каждом туре были даже две игры между земляками.

2. **а**) [1] Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на верхнем рисунке?

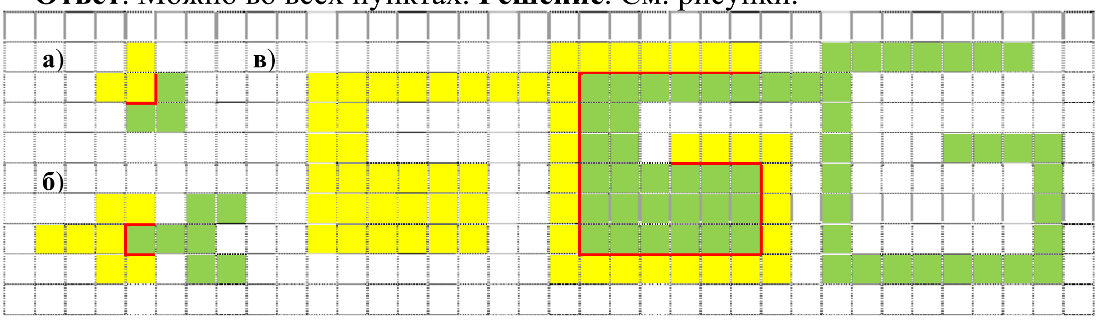


б) [2] Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на среднем рисунке.

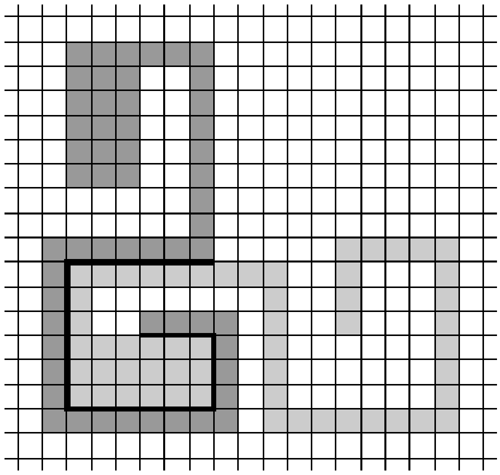
в) [4] Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на нижнем рисунке.

(Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.)

Ответ. Можно во всех пунктах. **Решение**. См. рисунки.



Замечание. Еще один способ для п. в).



3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 – сумма исходных чисел, a_2 – сумма квадратов исходных чисел, a_3 – сумма кубов исходных чисел, и т.д.

а) [4] Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 – возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \ldots$)?

б) [4] А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 – убывает?

а) Ответ. Могло. **Решение**. *Пример 1*. Возьмём число 2 и 1024 числа, равных ½. Тогда $a_n = 2^n + 1024\cdot 2^{-n} = 32(2^{n-5} + 2^{5-n})$. Сумма двух положительных взаимно обратных чисел тем меньше, чем ближе они друг к другу. Поэтому построенная последовательность убывает до $n = 5$, а потом возрастает.

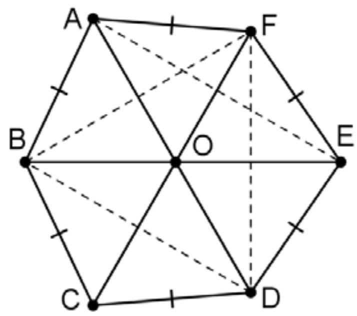
Пример 2. Возьмём $a_n = 1{,}02^n + 0{,}5^n$. Заметим, что $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow 0{,}02\cdot 1{,}02^n > 0{,}5^{n+1} \Leftrightarrow 2{,}04^n > 25 \Leftrightarrow n \geq 5$. То есть последовательность убывает до $n = 5$, а потом возрастает.

б) Ответ. Не могло. **Решение**. Предположим, такое случилось.

Первый способ. Тогда $a_n < a_5$ для любого n. Среди исходных чисел было число $x > 1$, иначе бы последовательность никогда не возрастала. Заметим, что $a_n > x^n$ для любого n. А последовательность x^n не ограничена. Противоречие.

Второй способ. Тогда $a_4 < a_5$ и $a_6 < a_5$, то есть $a_4 + a_6 < 2a_5$. Значит, $x^4 + x^6 < 2x^5$ хотя бы для одного из исходных чисел x. Но это противоречит неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим.

4. [8] В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность.



Решение 1. Поскольку треугольники ABD и EDB равны по трём сторонам, то четырёхугольник $ABDE$ – равнобокая трапеция или прямоугольник. Её ось симметрии – серединный перпендикуляр к основаниям BD и AE. На этом же перпендикуляре лежат и вершины C и F равнобедренных треугольников BCD и AFE. Аналогично прямые AD и BE являются осями симметрии шестиугольника. Все три оси пересекаются в центре O описанной окружности треугольника BDF. Так как биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке, то его стороны равноудалены от неё.

Осталось заметить, что перпендикуляры, опущенные из точки O на стороны шестиугольника, попадают именно на стороны, а не на их продолжения. Так происходит потому, что, например, углы треугольника AOB при стороне AB равны половинам углов A и B выпуклого шестиугольника, то есть являются острыми.

Решение 2. Так как треугольники ABD и EDB равны по трём сторонам, они совмещаются друг с другом симметрией относительно серединного перпендикуляра к BD (так как A и E по одну сторону от BD). Значит, этот перпендикуляр совпадает с серединным перпендикуляром к AE, а так как $AF = AE$ и $BC = CD$, он является осью симметрии шестиугольника. Аналогично прямые AD и BE – оси симметрии шестиугольника. Получаем, что треугольник BFD имеет три оси симметрии, то есть он правильный. На его стороны опираются одинаковые равнобедренные треугольники ABF, EFD, CDB, торчащие наружу (так как шестиугольник выпуклый). Значит, увеличивая радиус и не меняя центр вписанной окружности треугольника BFD, мы сможем получить окружность, касающуюся всех сторон шестиугольника.

Замечание. Можно показать, что любой выпуклый многоугольник, у которого через каждую вершину проходит ось симметрии, является описанным.

5. [8] Вес каждой гирьки набора – нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

Ответ. 7 гирь. **Решение**. *Пример 1*. Возьмём гири в 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43 г. Первыми двумя можно взвесить любой целый вес до 2 г. Значит, первыми тремя – до 5 г, четырьмя – до 10 г, пятью – до 21 г, шестью – до 42 г, семью – до 85 г. Уменьшим вес каждой гири в два раза. Теперь все гирьки весят нецелое число грамм, и ими можно взвесить любой целый или полуцелый вес от 0,5 до 42,5 г.

Пример 2. Гирями 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 г можно взвесить любой целый вес до 127 г. Оставим от каждой гири лишь треть. Веса гирек станут нецелыми, и ими можно будет взвесить любой целый вес до 42 г.

Оценка. Предположим, что в наборе 6 гирь. Различных поднаборов $2^6 = 64$. Покрасим одну гирю в жёлтый цвет и разобьём поднаборы на пары, отличающиеся только наличием в них жёлтой гири. Поскольку веса парных поднаборов отличаются нецелым весом жёлтой гири, то максимум один из них может иметь целый вес в граммах. Поэтому поднаборов с целым весом не более 32, и 40 различных целых весов этим набором гирь не набрать. Противоречие.

6. [10] Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым.

Пример. 62.

Решение. Предположим, что кузнечик пропрыгал полоску из 62 клеток. Покрасим 8 левых её клеток белым, следующие 10 – чёрным, потом снова 8 – белым и так далее. Всего будет 32 белых клетки и 30 чёрных. Поскольку разность количеств белых и чёрных клеток больше 1, то был прыжок между белыми клетками. Но такие прыжки невозможны.

Замечание. Рассмотрим полоску из 63 клеток. Увеличим в решении один из белых кусков на одну клетку. Тогда разность количеств белых и чёрных клеток увеличится на единицу и количество возможных прыжков между белыми клетками – тоже. Поэтому снова получается противоречие. Так можно сделать с каждым из четырёх белых кусков. Таким образом, числа 63, 64, 65, 66 тоже не пропрыгиваемы.

Аналогично, уменьшая в решении чёрные куски на одну клетку, можно показать, что числа 59, 60, 61 не пропрыгиваемы.

7. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску

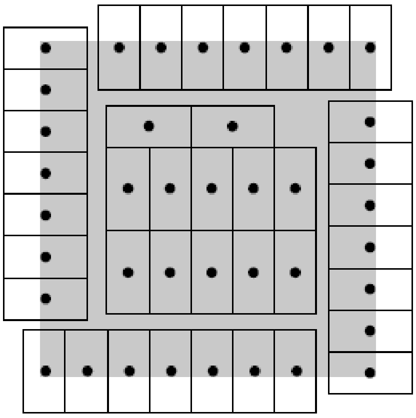
а) [6] хотя бы 40 доминошек;

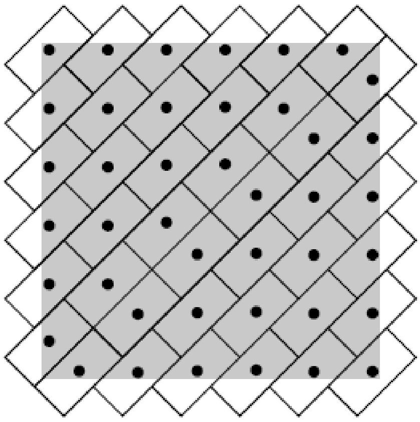
б) [3] хотя бы 41 доминошку;

в) [3] более 41 доминошки.

Решение. **а**) **Первый способ**. Возьмём квадрат с вершинами (±4, ±4) и повернём его немного относительно центра так, чтобы его вертикальные стороны не пересекли прямых с полуцелыми абсциссами. Исходный квадрат пересекал восемь таких прямых. После поворота квадрат высекает на них отрезки длины больше 8. Значит, внутри каждого из них можно разместить с шагом 2 по пять центров вертикальных доминошек.

Второй способ. См. рис. слева.

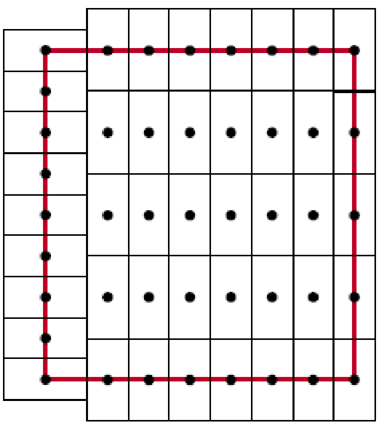


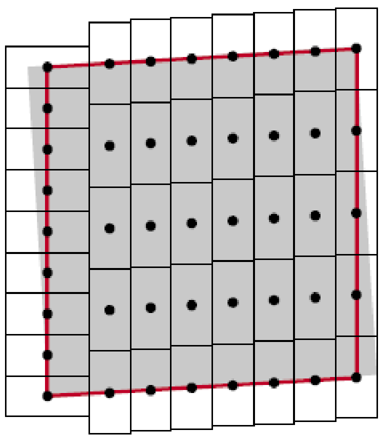


в) На рисунке справа показана укладка 42 доминошек. Центры левой верхней и правой нижней доминошек лежат на границе квадрата с диагональю 11, которая меньше диагонали доски 8×8. Поэтому центры всех доминошек уместятся на доске.

Замечание 1. Повернём указанный в первом способе решения п. а) квадрат так, чтобы его вертикальные стороны не пересекли прямых $x = \pm 3\frac{3}{4}$. На семи прямых $x = -3\frac{3}{4}$, $x = -2\frac{3}{4}$, $x = -1\frac{3}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1\frac{1}{4}$, $x = 2\frac{1}{4}$, как и раньше, поместим по пять центров вертикальных доминошек, а на прямой $x = 3\frac{3}{4}$ – 9 центров горизонтальных доминошек. Итого выложено $75 + 9 = \mathbf{44}$ доминошки.

Замечание 2. Вот ещё один способ для 44 доминошек. Расположим 35 доминошек так, как на левом рисунке ниже. Центры «граничных» доминошек образуют прямоугольник 8×7,5. Чуть сдвинем 7 вертикальных рядов из 5 доминошек вверх (каждый ряд на своё расстояние), чтобы центры «граничных» доминошек образовали параллелограмм (красный на правом рисунке ниже). Расстояние между его верхней и нижней сторонами меньше 8, сами стороны равны по 7,5 и совсем немного сдвинуты друг относительно друга. Поэтому этот параллелограмм можно накрыть квадратом 8×8.





Старшие классы

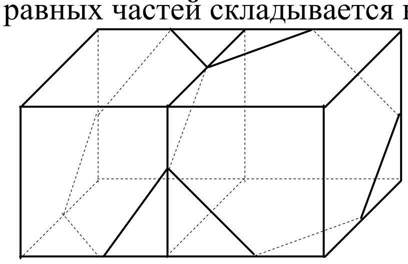
1. [4] Дан треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке.

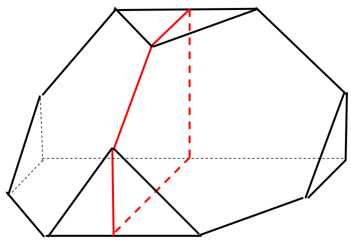
Решение. Прямая равноудалена от концов отрезка в двух случаях: она параллельна ему или проходит через его середину. Если среди данных прямых нет параллельных, то не менее семи из них удовлетворяют второму условию, то есть проходят через одну из трёх середин сторон треугольника. Значит, через одну из этих точек проходит не менее трёх данных прямых.

2. [3+3] См. задачу 3 младших классов.

3. [7] Вася утверждает, что он разрезал выпуклый многогранник, у которого есть лишь треугольные и шестиугольные грани, на две части и склеил из этих частей куб. Могут ли слова Васи быть правдой?

Ответ. Могут. **Решение**. Как известно, у куба есть шестиугольное сечение, проходящее через середины рёбер. Оно разрезает куб на две равные части. Присоединим два куба гранями. Проведём в них эти сечения, как показано на рисунке слева. Отбросив от каждого куба половину, получим выпуклый многогранник (рис. справа), у которого лишь треугольные и шестиугольные грани. Если разрезать его по общей грани бывших кубов, то из этих равных частей складывается куб.





4. [8] Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Ф, что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат, все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли Ф – прямоугольник?

Ответ. Не обязательно. **Решение**. Заменим цвета цифрами.

Первый способ. Раскрасим сначала клетки квадрата в шахматном порядке. Занумеруем все белые клетки пятью цифрами так, чтобы любой кусок длины 5 белой диагонали содержал разные цифры. Это легко сделать, так как при повороте квадрата на 45° белые клетки образуют привычную прямоугольную сетку, а куски диагоналей превращаются в прямоугольники 1×5. Аналогично занумеруем чёрные клетки пятью другими цифрами.

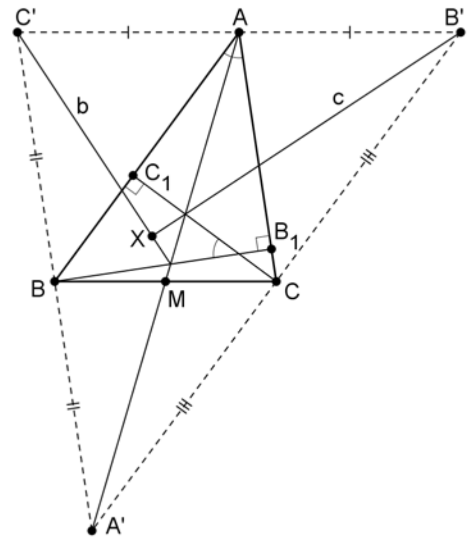
На рисунке слева приведён пример такой раскраски и два положения Петиного многоугольника. Ясно, что в любом возможном положении он накрывает два диагональных куска длины 5 разного цвета, следовательно, содержит все 10 цифр.

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
7	6	7	6	7	6	7	6	7	6
8	9	8	9	8	9	8	9	8	9
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3
5	4	5	4	5	4	5	4	5	4
6	7	6	7	6	7	6	7	6	7
9	8	9	8	9	8	9	8	9	8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Второй способ. Расставим цифры в первой строке с периодом 10. Каждая следующая строка получается из предыдущей сдвигом на 3 клетки вправо. Поскольку 3 и 10 взаимно просты, по вертикали цифры тоже расставлены с периодом 10. Петин многоугольник имеет вид буквы **Н**. В двух показанных на рис. справа положениях такой многоугольник содержит все 10 цифр. В силу периодичности он содержит все 10 цифр и при любом другом расположении.

5. [9] В треугольнике ABC с углом A, равным 45°, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.



Решение. Проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые образуют «удвоенный» треугольник $A'B'C'$ (см. рис.). Заметим, что BB_1 – серединный перпендикуляр к $A'C'$, а A' лежит на прямой AM. Поэтому при симметрии относительно BB_1 точка A' переходит в C', значит, C' лежит на b. Аналогично B' лежит на c.

При переходе от прямых к перпендикулярным им, углы сохраняются. Поэтому угол между высотами BB_1 и CC_1 тоже равен 45°. Прямые b и c получаются друг из друга композицией симметрий относительно этих высот, то есть поворотом на удвоенный угол между ними. Следовательно, b и c перпендикулярны. Медиана XA прямоугольного треугольника $XB'C'$ равна половине гипотенузы $B'C'$, то есть равна BC.

6. [10] При каких натуральных n для каждого целого $k \geq n$ найдётся кратное n число с суммой цифр k?

Ответ. При n, не кратных 3. **Решение**. Если n кратно 3, то всякое кратное n число кратно и 3. Значит, сумма цифр этого числа кратна 3, поэтому не может быть равной, например, $n + 1$.

Далее считаем, что n не кратно 3. Тогда найдётся решение сравнения $9x \equiv - k \pmod{n}$ относительно x в интервале $0 < x \leq n \leq k$.

Если n взаимно просто с 10, то $10^a \equiv 1 \pmod{n}$ при некотором натуральном a. Тогда подойдёт число $(10^{a+1} + 10^{2a+1} + \ldots + 10^{ax+1}) + (10^a + 10^{2a} + \ldots + 10^{a(k-x)})$ (при $k = n$ подойдёт x , равное n, а вторая скобка отсутствует). Его сумма цифр равна $x + (k - x) = k$, а по модулю n оно сравнимо с $10x + (k - x) \equiv 0$.

Если же $n = 2^b5^cd$, где d взаимно просто с 10, то $k > d$. Как показано выше, существует кратное d число с суммой цифр k. Домножив его на $10^{\max(b,c)}$, получим искомое число.

7. [12] В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?

Ответ. 3^{12} банд. **Решение**. Если гангстеры не враждуют, то будем считать, что они *дружат*. Тогда банда – это *максимальная* дружная компания (добавление любого гангстера нарушает её дружность). И всякую такую компанию объявим бандой, если она таковой ещё не является.

Пример. Пусть гангстеры разбиты на 12 троек, гангстеры из одной тройки враждуют, а из разных – дружат. Тогда каждая банда содержит из каждой тройки ровно по одному гангстеру. Поэтому будет 3^{12} банд.

Оценка. **Первый способ**. Пусть бандой является любая компания, внутри которой все *дружат* (т.е. не враждуют) и которую нельзя расширить с сохранением этого свойства. Назовём *авторитетом* гангстера количество банд, в которых он состоит. Пусть гангстеры X и Y – враги, причём авторитет X не ниже, чем авторитет Y. Заменим Y *клоном* гангстера X, т.е. гангстером Z, у которого те же враги, что у X, причём X и Z также враждуют. Тогда могут исчезнуть лишь те банды, в которые входил Y. Действительно, пусть Y не входил в банду. Она останется бандой, если Z враждебен кому-то из её членов. Если X не входит в эту банду, то он враждебен кому-то в банде, и тогда ему враждебен и Z. Если же X входит в банду, то он сам является врагом Z в этой банде.

Таким образом, количество исчезнувших банд не больше, чем авторитет Y. Зато добавятся банды с участием Z, количество которых равно авторитету X. Значит, общее количество банд не уменьшилось, а если авторитет X больше авторитета Y, то увеличилось.

Пусть количество банд наибольшее из возможных. Из предыдущего следует, что в этом случае у любых двух врагов одинаковые авторитеты. Возьмём любого гангстера X и заменим одного из его врагов клоном X. Количество банд не изменится, и у врагов опять одинаковые авторитеты. Так поступим со всеми врагами X. Получим компанию враждующих гангстеров, которые дружат со всеми остальными гангстерами.

Возьмём гангстера не из этой компании и проделаем с ним то же самое, и так далее. В итоге все гангстеры разобьются на компании, причём гангстеры из одной компании враждуют, а из разных – дружат. Тогда количество банд равно произведению размеров компаний.

Задача свелась к такой. Число 36 разложено на натуральные слагаемые. При каком разложении произведение этих слагаемых максимально?

Единичные слагаемые добавим к любому, произведение увеличится. Слагаемые вида $n + 2$, где $n \geq 2$, будем разбивать на два, произведение не будет уменьшаться, поскольку $2n \geq n + 2$. Останутся только двойки и тройки. Заменяя три двойки на две тройки, будем увеличивать произведение. В итоге получим 12 троек.

Таким образом, количество банд не больше 3^{12}.

Второй способ. Пусть $B(n)$ – наибольшее возможное количество банд, образующихся в множестве из n гангстеров.

Докажем индукцией по n, что $B(n) \leq 3^{n/3}$.

База. Нам удобнее начать с $n = 0$. В этом случае (и только в нём) пустое множество является бандой. Поэтому $B(0) = 1 \leq 3^{0/3}$.

Шаг индукции. Пусть имеется $n > 0$ гангстеров, они составляют $B(n)$ банд, причём самый дружелюбный гангстер A имеет $a - 1$ врага.

Рассмотрим произвольного гангстера C, имеющего $c - 1$ врага. Каждая «его» банда содержит кроме него только некоторых его друзей, которые, как легко проверить, образуют банду в множестве всех $n - c$ его друзей. Поэтому, учитывая предположение индукции, «его» банд не больше $B(n - c) \leq 3^{(n-c)/3} \leq 3^{(n-a)/3}$.

Каждая банда содержит A или кого-то из его врагов. Как показано выше, для каждого из этих a гангстеров количество «его» банд не превосходит $3^{(n-a)/3}$. Значит, $B(n) \leq a \cdot 3^{(n-a)/3}$.

Докажем, что $a \cdot 3^{(n-a)/3} \leq 3^{n/3}$, то есть $a^3 \leq 3^a$. Действительно, это неравенство верно для a, равного 1, 2 и 3. При каждом следующем увеличении a на единицу правая часть умножается на 3, а левая – на $\left(\frac{a+1}{a}\right)^3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 < 3$.

Замечание. Аналогично можно доказать, что $B(n) = \begin{cases} 3^k & \text{при } n = 3k, \\ 2 \cdot 3^k & \text{при } n = 3k+2, \\ 4 \cdot 3^k & \text{при } n = 3k+4 \end{cases}$ при $n \geq 2$.