ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

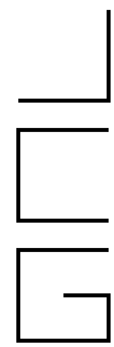
8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2017 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 — 1. В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причем не меньше чем в половине всех игр участники были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре хоть одна игра была между земляками.

2.



1 — а) Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на верхнем рисунке?

2 — б) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на среднем рисунке.

4 — в) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на нижнем рисунке.

(Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.)

3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т.д.

4 — а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \ldots$)?

4 — б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?

8 — 4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность.

8 — 5. Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

10 — 6. Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым.

7. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску

6 — а) хотя бы 40 доминошек;

3 — б) хотя бы 41 доминошку;

3 — в) более 41 доминошки.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 12 марта 2017 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Дан треугольник и 10 прямых. Оказалось, что каждая прямая равноудалена от каких-то двух вершин треугольника. Докажите, что или две из этих прямых параллельны, или три из них пересекаются в одной точке.
	2.	Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т.д.
3	а)	Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < ...$)?
3	б)	А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?
7	3.	Вася утверждает, что он разрезал выпуклый многогранник, у которого есть лишь треугольные и шестиугольные грани, на две части и склеил из этих частей куб. Могут ли слова Васи быть правдой?
8	4.	Петя раскрасил каждую клетку квадрата 1000×1000 в один из 10 цветов. Также он придумал такой 10-клеточный многоугольник Φ, что при любом способе положить его по границам клеток на раскрашенный квадрат, все 10 накрытых им клеток будут разного цвета. Обязательно ли Φ — прямоугольник?
9	5.	В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая c симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$.
10	6.	При каких натуральных n для всякого целого $k \geq n$ найдется число с суммой цифр k, кратное n?
12	7.	В Чикаго живут 36 гангстеров, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем нет двух банд с совпадающим составом. Оказалось, что гангстеры, состоящие в одной банде, не враждуют, но если гангстер не состоит в какой-то банде, то он враждует хотя бы с одним ее участником. Какое наибольшее число банд могло быть в Чикаго?