39-й Международный математический Турнир городов
Осень, базовый вариант, младшие классы

1. [3] Имеется 5 ненулевых чисел. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что пять сумм положительны и пять сумм отрицательны. Сколько произведений положительны и сколько – отрицательны? (*Б. Френкин*)

Ответ. Четыре положительны, шесть отрицательны. **Решение**. Если бы среди имеющихся чисел нашлись четыре числа одного знака, то уже они дали бы шесть сумм этого знака. Поэтому имеется три числа одного знака и два – другого. Отсюда – ответ.

2. [4] Существуют ли такие 99 последовательных натуральных чисел, что наименьшее из них делится на 100, следующее делится на 99, третье делится на 98, …, последнее делится на 2? (*П. Кожевников*)

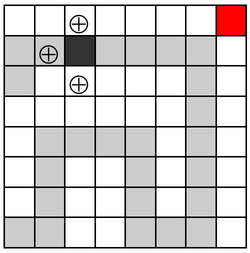
Ответ. Существуют. *Пример*. $100! - 100$, $100! - 99$, …, $100! - 2$.

3. [4] В ряд лежат 100 внешне одинаковых монет. Среди них ровно 26 фальшивых, причём они лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – не обязательно одинаково, но они легче настоящих. Как за одно взвешивание на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету? (*Р. Женодаров*)

Решение. Рассмотрим 26-ю, 52-ю и 78-ю монеты. Ясно, что среди них ровно одна фальшивая. Сравнение любых двух из трёх монет выявит её.

Замечание. Есть много других способов, например, сравнить первые 25 или 26 монет с последними.

4. [5] На одной из клеток поля 8×8 зарыт клад. Вы находитесь с металлоискателем в центре одной из угловых клеток этого поля и передвигаетесь, переходя в центры соседних по стороне клеток. Металлоискатель срабатывает, если вы оказались на той клетке, где зарыт клад, или в одной из соседних с ней по стороне клеток. Можно ли гарантированно указать клетку, где зарыт клад, пройдя расстояние не более 26? (*М. Евдокимов*)



Ответ. Можно. **Решение**. (*Авиэль Боаг, Израиль*) Достаточно даже 25 ходов. Будем двигаться по пути указанному на рисунке. Когда миноискатель сработает впервые, клад сможет находиться не более чем в трёх клетках. Например, если он сработал в чёрной клетке, то подозрительными будут три клетки, помеченные на рисунке. Легко видеть, что выбрать из них нужную можно за два хода. Если металлоискатель впервые сработает на 24-м ходу, то подозрительных клеток останется две, а на 25-м – одна, поэтому оставшихся ходов хватит. Если миноискатель не сработает ни разу, то мина – в красной клетке.

Замечание. В решениях участников турнира встретилось много разных подходящих 26-ходовых путей. Как показала проверка на компьютере, 24 ходов недостаточно.

5. [5] Окружность радиуса 1 нарисована на шахматной доске так, что целиком содержит внутри белую клетку (сторона клетки равна 1). Докажите, что участки этой окружности, проходящие по белым клеткам, составляют суммарно не более ⅓ от её длины. (*М. Евдокимов*)

Решение. Окружность лежит в восьмиклеточной рамке, окружающей указанную клетку, иначе расстояние от точки окружности вне рамки до дальней вершины исходной клетки будет больше 2 – диаметра окружности. Поэтому окружность разбивается на восемь дуг чередующихся цветов (белые дуги могут быть нулевыми). Заметим, что каждая чёрная дуга не меньше 60°, поскольку стягивающая её хорда не меньше стороны клетки, то есть радиуса окружности. Поэтому четыре чёрные дуги составляют не менее ⅔ длины окружности.

39-й Международный математический Турнир городов
Осень, базовый вариант, старшие классы

1. [4] Существуют ли нецелые числа x и y, для которых $\{x\}\{y\} = \{x + y\}$? (*М.Евдокимов*)

Ответ. Не существуют. **Решение.** Пусть $\{x\}=\alpha$, $\{y\}=\beta$, тогда $\{x + y\}=\{\alpha + \beta\}$. Из условия следует, что $\alpha + \beta - \alpha\beta$ – целое число. Значит, и число $1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta = (1 - \alpha)(1 - \beta)$ – целое. Но это не так.

2. [4] В треугольнике ABC провели биссектрису CL. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает отрезок CL в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и AKL касаются. (*М. Панов*)

Решение. Проведём в общей точке A этих окружностей касательные l и m соответственно. Угол между l и хордой AB равен $\angle C$. Угол между m и хордой AL равен $\angle AKL=\angle KAC+\angle KCA=2\angle KCA=\angle C$. Следовательно, прямые l и m совпадают, что и требовалось.

3. [4] Имеется 21 ненулевое число. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что половина всех сумм положительна и половина – отрицательна. Каково наибольшее возможное количество положительных произведений? (*Б. Френкин, С. Кудря*)

Ответ. 120. Всего сумм 210, то есть по 105 сумм каждого знака. Пусть было x чисел одного знака и y – другого. Нам надо минимизировать количество xy отрицательных произведений. При фиксированной сумме произведение чисел тем меньше, чем дальше они друг от друга. Ни одно из чисел x и y не может быть больше 15 (иначе количество сумм одного знака будет больше $15\cdot 14:2 = 105$), поэтому наилучший результат будет при $x = 15$, $y = 6$ (или наоборот). При этом количество отрицательных произведений равно 90. Нужное количество положительных сумм достигается, например, если пятнадцать чисел равны 1, а шесть равны –2.

4. **а**) [2] Может ли шар некоторого радиуса высекать на гранях какого-нибудь правильного тетраэдра круги радиусов 1, 2, 3 и 4? **б**) [3] Тот же вопрос для шара радиуса 5. (*М. Евдокимов*)

Ответ. Может в обоих пунктах. **а**) Возьмём такой правильный тетраэдр, что шар, касающийся его рёбер, высекает на гранях круги радиуса больше 4. Затем будем отдалять одну из граней от центра шара, пока в этой грани не высечется круг радиуса 4. Тетраэдр при этом останется правильным, радиусы кругов в других гранях не изменятся. Аналогично отдалим остальные грани, чтобы получить нужные круги.

б) Рассмотрим шар с центром O радиуса 5. Опишем вокруг него правильный тетраэдр. На радиусах, соединяющих O с точками касания, найдём точки, для которых плоскости, проходящие через эти точки и перпендикулярные этим радиусам, пересекают шар по кругам радиусов 1, 2, 3, 4.

Осталось доказать, что эти четыре круга не пересекаются (тогда указанные плоскости образуют тетраэдр). Достаточно доказать это для кругов радиусов 3 и 4. Заметим: если бы соответствующие радиусы были перпендикулярны, то круги касались бы (поскольку треугольник со сторонами 3, 4, 5 прямоугольный). Так как угол между радиусами на самом деле тупой, круги пересекаться не будут.

5. [5] В левой нижней клетке доски 100×100 стоит фишка. Чередуя горизонтальные и вертикальные ходы в соседнюю по стороне клетку (первый ход – горизонтальный), она дошла сначала до левой верхней клетки, а потом до правой верхней. Докажите, что найдутся две такие клетки A и B, что фишка не менее двух раз делала ход из A в B. (*А. Грибалко*)

Решение. Раскрасим клетки в шахматном порядке так, что левая нижняя клетка X – чёрная. Тогда левая верхняя Y – белая. Из чёрной клетки X делается горизонтальный ход, следующий ход – из белой вертикально, потом – снова из чёрной горизонтально и так далее, чередуясь. Это значит, что из чёрной клетки фишка всегда выходит горизонтально, а из белой – вертикально. В частности, в Y фишка попала горизонтальным ходом.

Пусть одинаковых ходов не было. Тогда никакую сторону клетки фишка не может пересечь дважды: в том же направлении – в силу предположения, а в противоположном – в силу указанного выше чередования.

Поскольку пройденную сторону клетки снова проходить нельзя, будем «строить» вдоль неё стену. Очевидно, стены образуют связное множество. Когда фишка доберётся до Y, стены соединят нижний и верхний края доски. Вся доска разобьётся стенами на области, причём Y и правая верхняя клетка Z окажутся в разных областях. Следовательно, из Y в Z фишка пройти не сможет. Противоречие.

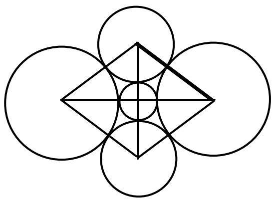
39-й Международный математический Турнир городов
Осень, сложный вариант, младшие классы

1. [4] Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3 : 4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравновесились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара? (*Г. Гальперин*)

Ответ. Удастся. **Решение**. Положим гирю на левую чашу и уравновесим её 8 кг сахара. Уберём гирю и насыпем на левую чашу 6 кг сахара. Поменяем пакеты местами и доложим на правую чашу гирю. Теперь на левой чаше – 8 кг, на правой – 12. Для равновесия не хватает 1 кг сахара на левой чаше, который и насыпаем.

2. [4] Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой? (*Е. Бакаев*)

Решение. См. рисунок, на котором центры пяти монет находятся в вершинах четырёх треугольников со сторонами 3, 4, 5.



3. [6] Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за июль, на сколько – за август, и на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на x%, то курс падал на x%, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс? (*А. Заславский*)

Ответ. Уменьшился. **Решение**. Будем вместо процентов использовать доли: изменение курса на x ($0 < |x| < 1$) означает домножение на $1 + x$. Например, если курс возрос на 20%, то $x = 0{,}2$, а если уменьшился на 20%, то $x = -0{,}2$). Пусть аналитик предсказал изменения x, y, z, и курс в итоге домножился на a (где $a>0$). Тогда по условию $a = (1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$, откуда $a^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) < 1$, и, следовательно, $a<1$.

4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

а) [1] 99 попыток; **б**) [3] 75 попыток; **в**) [4] 74 попыток. (*А. Лебедев, А. Шаповалов*)

Ответ. **а**)-**б**) Можно; **в**) нельзя. **Решение**. **а**) Попробуем, подходит ли первый ключ к первой двери. Если да, то первый ключ *опознан*. Если нет, то он подходит ко второй двери, а к первой двери – второй ключ. В этом случае опознаны два ключа. Берём очередной слева неопознанный ключ, проверяем его на соответствующей ему двери, распознаём хотя бы один ключ. Если после 99 таких попыток останется нераспознанное, то это последний ключ и для него осталась только одна дверь.

б) Попробуем, подходит ли третий ключ к третьей двери. Если он подходит, то с первыми двумя ключами мы сможем разобраться за одну попытку. Итого за две попытки опознаны первые три ключа.

Если он не подошёл, то попробуем, подходит ли он ко второй двери. Если да, то первый ключ может подойти только к первой двери, а второй – к третьей. Снова за две попытки опознаны три первых ключа. Если снова не подошёл, то он подходит к четвёртой двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, следовательно, третью дверь открывает четвёртый ключ. С первыми двумя ключами и дверьми разберёмся за одну попытку. В этом случае за три попытки опознаны четыре ключа.

Повторяем процесс: пробуем третий слева неопознанный ключ к соответствующей двери. Распознаём за две попытки три ключа или за три попытки четыре ключа. Если мы уже не можем выполнить этот шаг, то осталось менее трёх нераспознанных ключей. С двумя ключами разберёмся за одну попытку, с одним – за ноль попыток. Поскольку каждый раз количество попыток не превосходило ¾ распознаваемых дверей, то всего попыток будет не более 75.

в) Предположим, что Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьём двери и ключи на 25 четвёрок подряд идущих. Облегчим Хвастуну задачу. Будем предлагать ему только такие расположения ключей, в которых ключи не могут открывать двери из других четвёрок, и сообщим Хвастуну об этом. Тогда бессмысленно будет пробовать ключ к двери из другой четвёрки, и у Хвастуна всё равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четвёрке он делает не более двух попыток. У пары попыток есть лишь четыре различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четвёрке. Но вариантов соответствия четырёх ключей и дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

5. [9] Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n. Могло ли получиться число, записываемое только единицами? (*Ф. Петров*)

Ответ. Не могло.

Решение 1 (подробное). Заметим сначала, что произведение двух k-значных чисел – либо $(2k–1)$-значное число, либо $2k$-значное. Действительно, наименьшее k-значное число 10^{k-1}, умноженное само на себя, даёт число 10^{2k-2}, в котором $2k–1$ знаков, а наибольшее k-значное число, умноженное само на себя, даёт меньше, чем наименьшее $(k+1)$-значное число 10^k, умноженное само на себя, откуда результат меньше наименьшего $(2k+1)$-значного числа 10^{2k}.

Пусть даны числа $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1}$ и $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$. Представим себе, что мы умножаем их в столбик.

В самом правом разряде будет стоять $a_1 a_k$ (возможно, с переносом, который уйдёт в следующие разряды), и в $(2k–1)$-м справа разряде тогда – минимум $a_1 a_k$. По условию, $a_1 a_k$ оканчивается на 1. Если есть ещё и перенос, то $a_1 a_k$ не меньше 11, и как минимум этот же перенос есть и в $(2k–1)$-м разряде. Но произведение двух цифр не может дать 11, то есть $a_1 a_k$ ещё больше. Значит, в $(2k–1)$-м разряде после всех переносов должно получиться минимум 111 (иначе в итоге не получится число из одних единиц), что невозможно – в нашем произведении будет слишком много цифр (не меньше $2k+1$). Поэтому переноса нет и $a_1 = a_k = 1$. Тогда произведение наших чисел будет меньше, чем $(2\cdot 10^{k-1})\cdot(2\cdot 10^{k-1}) = 4\cdot 10^{2k-2}$, то есть в произведении $2k–1$ разрядов.

Посмотрим теперь на второй разряд справа. Там стоит $a_k a_2 + a_{k-1} a_1$, возможно с переносом. Если перенос есть, то минимум такой же перенос будет и в $(2k–2)$-м разряде, и единица в $(2k–1)$-м разряде испортится. Значит, переноса нет, и $a_k a_2 + a_{k-1} a_1 = 1$. Аналогично получаем, что и в третьем разряде (справа и слева) переноса нет и там 1, и так далее. Так мы дойдём до середины и получим, что там тоже 1 без переноса. Но на среднем месте стоит $a_1{}^2 + \ldots + a_k{}^2$, что не меньше 2 (ведь $a_1 = a_k = 1$). Противоречие. Значит, число из одних единиц получить нельзя.

Решение 2. Предположим, что так получилось для чисел $n = \overline{a_k \ldots a_0}$ и $m = \overline{a_0 \ldots a_k}$.

Последняя цифра числа $a_k a_0$ совпадает с последней цифрой nm, то есть равна 1. Это возможно только в трёх случаях: a_0 и a_k – две девятки, тройка и семёрка или две единицы. В первом случае $(9\cdot 10^k)^2 \le nm < (10\cdot 10^k)^2$, то есть nm начинается на 8 или 9. Во втором случае аналогично получаем $21\cdot 10^{2k} \le nm < 32\cdot 10^{2k}$, то есть nm начинается на 2 или 3. Следовательно, $a_k = a_0 = 1$.

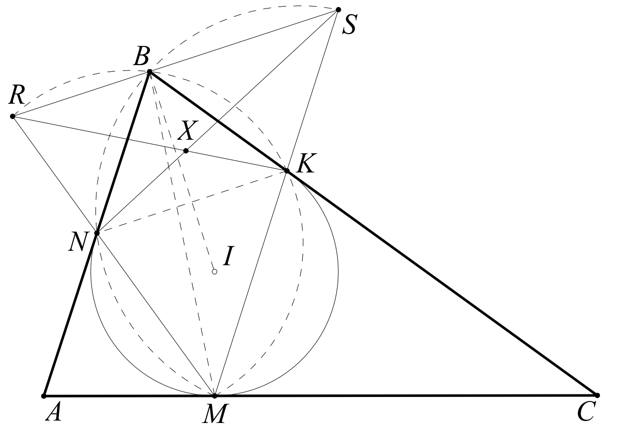
Заметим, что $nm = b_0\cdot 10^{2k} + b_1\cdot 10^{2k-1} + \ldots + b_1\cdot 10 + b_0$, где $b_i = a_0 a_{k-i} + a_1 a_{k-i+1} + \ldots + a_i a_k$.

С другой стороны $10^{2k} \le nm < 4\cdot 10^{2k}$, значит, $nm = 10^{2k} + 10^{2k-1} + \ldots + 10 + 1$.

Сравним два выражения nm и покажем, что все соответствующие слагаемые равны. Для первого слагаемого это так. Пусть это верно для i первых слагаемых. Тогда $b_{2k-i} \le 1$, иначе первое выражение больше, поскольку $10^{2k-i} > 10^{2k-i-1} + \ldots + 1$. Ещё у выражений совпадают и последние i слагаемых, поэтому $b_i > 0$ (иначе выражения будут отличаться $(i+1)$-й цифрой справа). Значит и $b_i = 1$.

В частности, $b_k = 1$. Но $b_k \geq a_0^2 + a_k^2 = 2$ при $k > 0$. Следовательно, $k = 0$, то есть $n = 1$, что противоречит условию.

6. [9] Вписанная окружность касается сторон *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* в точках *N*, *K* и *M* соответственно. Прямые *MN* и *MK* пересекают биссектрису внешнего угла *B* в точках *R* и *S* соответственно. Докажите, что прямые *RK* и *SN* пересекаются на вписанной окружности треугольника *ABC*. (*М. Евдокимов*)



Решение. Пусть *X* – точка пересечения *RK* и *SN*. Прямые *NK* и *RS* параллельны, поскольку перпендикулярны биссектрисе угла *B*. Угол *NMK* равен углу *NKB* между касательной и хордой, а последний – углу *SBK* по доказанной параллельности. Следовательно, четырёхугольник *RBKM* – вписанный. Поэтому $\angle RKM = \angle RBM$. Аналогично $\angle SNM = \angle SBM$. Но углы *RBM* и *SBM* дают в сумме 180°, значит, и углы *XKM* и *XNM* – тоже. Следовательно, четырёхугольник *NMKX* – вписанный, что и требовалось.

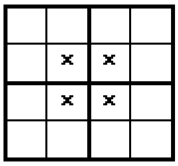
Замечание для знатоков. Утверждение верно не только для биссектрисы внешнего угла, но и для любой прямой, проходящей через точку *B*. Дело в том, что для любой точки *X* вписанной окружности точка пересечения прямых *MK* и *NX*, точка пересечения *MN* и *KX* и точка *B* пересечения касательных в точках *K* и *N* лежат на одной прямой (это частный случай *теоремы Паскаля* для вписанной шестизвенной замкнутой ломаной *MKKBNN*).

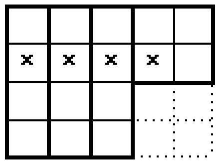
7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседних по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесённом доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры

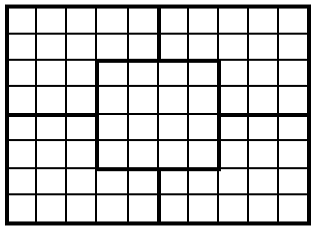
а) [5] 20×20 клеток; **б**) [5] 50×90 клеток? (*М. Мурашкин*)

Ответ. **а**) 25; **б**) 282. **Решение**. *Оценка*. Рассмотрим клетку, что осталась непустой. Изначально в ней был один дом. Каждым поглощением количество исходных домов в ней увеличивалось максимум вдвое. Ею было сделано не более четырёх поглощений, поскольку у неё не более четырёх соседей. Следовательно, в одной клетке могло собраться не более 16 исходных домов. Поэтому количество оставшихся домов не меньше площади прямоугольника, делённой на 16.

Пример. **а**) Квадрат 20×20 разобьём на 25 квадратов 4×4, в каждом из которых можно оставить по одному дому. Действительно, в квадрате 2×2 легко собрать все дома в одной клетке. Соберём их в отмеченных клетках (рис. слева). Аналогично собираются все отмеченные клетки.







б) (*Замир Ашурбеков, 11 кл., г. Дербент*) Поскольку 4500 при делении на 16 даёт остаток 4, то достаточно разбить прямоугольник 50×90 на 16-клеточные фигуры и одну четырёхклеточную, в каждой из которых можно собрать все дома. Подходящая 16-клеточная фигура и порядок сбора домов в ней изображены на рис. в центре.

Из 16-клеточных фигур сначала сложим прямоугольник 8×10 (рис. справа).

Прямоугольник 50×90 разобьём на четыре прямоугольника: 50×72, 32×10, 32×8 и 18×18. Первые два из них разбиваются на прямоугольники 8×10, третий – на квадраты 4×4, а последний – на четыре прямоугольника 8×10 и квадрат 2×2 (в центре). Что и требовалось.

39-й Международный математический Турнир городов
Осень, сложный вариант, старшие классы

1. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

а) [1] 99 попыток; **б**) [2] 75 попыток; **в**) [3] 74 попыток. (*А. Лебедев, А. Шаповалов*)

Ответ. **а**)-**б**) Можно; **в**) нельзя. **Решение**. **а**) Попробуем, подходит ли первый ключ к первой двери. Если да, то первый ключ *опознан*. Если нет, то он подходит ко второй двери, а к первой двери – второй ключ. В этом случае опознаны два ключа. Берём очередной слева неопознанный ключ, проверяем его на соответствующей ему двери, распознаём хотя бы один ключ. Если после 99 таких попыток останется нераспознанное, то это последний ключ и для него осталась только одна дверь.

б) Попробуем, подходит ли третий ключ к третьей двери. Если он подходит, то с первыми двумя ключами мы сможем разобраться за одну попытку. Итого за две попытки опознаны первые три ключа.

Если он не подошёл, то попробуем, подходит ли он ко второй двери. Если да, то первый ключ может подойти только к первой двери, а второй – к третьей. Снова за две попытки опознаны три первых ключа. Если снова не подошёл, то он подходит к четвёртой двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, следовательно, третью дверь открывает четвёртый ключ. С первыми двумя ключами и дверьми разберёмся за одну попытку. В этом случае за три попытки опознаны четыре ключа.

Повторяем процесс: пробуем третий слева неопознанный ключ к соответствующей двери. Распознаём за две попытки три ключа или за три попытки четыре ключа. Если мы уже не можем выполнить этот шаг, то осталось менее трёх нераспознанных ключей. С двумя ключами разберёмся за одну попытку, с одним – за ноль попыток. Поскольку каждый раз количество попыток не превосходило ¾ распознаваемых дверей, то всего попыток будет не более 75.

в) Предположим, что Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьём двери и ключи на 25 четвёрок подряд идущих. Облегчим Хвастуну задачу. Будем предлагать ему только такие расположения ключей, в которых ключи не могут открывать двери из других четвёрок, и сообщим Хвастуну об этом. Тогда бессмысленно будет пробовать ключ к двери из другой четвёрки, и у Хвастуна всё равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четвёрке он делает не более двух попыток. У пары попыток есть лишь четыре различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четвёрке. Но вариантов соответствия четырёх ключей и дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

2. [5] Дан правильный шестиугольник с центром O. Провели шесть равных окружностей с центрами в вершинах шестиугольника так, что точка O находится внутри окружностей. Угол величины α с вершиной O высекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна 6α. (*Е. Бакаев*)

Решение. Рассмотрим угол, симметричный данному относительно точки O. По теореме о величине угла между хордами эти два угла высекают на каждой окружности две дуги суммарной величины 2α, а на всех шести окружностях 12 углов суммарной величины 12α. Поскольку картинка симметрична относительно O, каждый из углов высекает по шесть дуг суммарной величины 6α.

3. [6] Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньшее 100%) изменится курс за октябрь, на сколько – за ноябрь, ..., на сколько – за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на x%, то курс падал на x%, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс? (*А. Заславский*)

Ответ. Уменьшился. **Решение**. Будем вместо процентов использовать доли: изменение курса на x ($0 < |x| < 1$) означает домножение на $1 + x$. Например, если курс возрос на 20%, то $x = 0{,}2$, а если уменьшился на 20%, то $x = -0{,}2$). Пусть аналитик предсказал изменения x, y, z, и курс в итоге домножился на a ($a>0$). Тогда по условию $a = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_{12}) = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{12})$, откуда $a^2 = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)\ldots(1 - x_{12}^2) < 1$, и, следовательно, $a<1$.

4. [8] Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, ..., a_n, ...$, состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие n и k, что $|a_0a_1...a_k + a_1a_2...a_{k+1} + ... + a_na_{n+1}...a_{n+k}| = 2017$. (*И. Митрофанов*)

Решение. Достаточно найти сумму указанного вида, чей модуль не меньше 2017: так как все слагаемые по модулю равны 1, в ней есть подсумма нужного вида с модулем ровно 2017.

Заметим, что если $a_i = a_j$ (где $i < j$), то $a_ia_{i+1}...a_{j-1} = a_{i+1}a_{i+2}...a_j$. Рассмотрим все наборы вида $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+4031})$. Поскольку их бесконечное число, среди них найдутся два одинаковых. Пусть это наборы, начинающиеся с a_i и a_j ($i < j$). Тогда $a_ia_{i+1}...a_{j-1} = a_{i+1}a_{i+2}...a_j = \ldots = a_{i+4032}a_{i+4033}...a_{j+4031}$. Разберём случай, когда все эти 4033 произведения равны 1.

Положим, $k = j - i - 1$, $S_n = a_0a_1...a_k + a_1a_2...a_{k+1} + ... + a_na_{n+1}...a_{n+k}$. Если $S_{i-1} \le -2017$, то S_{i-1} – искомая сумма. В противном случае, $S_{i+4032} \ge 2017$ и S_{i+4032} – искомая сумма.

5. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил:

1) вначале режем сыр на два куска, затем один из них режем на два куска, затем один из трёх кусков опять режем на два куска, и т.д.;

2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса каждой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R.

а) [3] Докажите, что при $R = 0{,}5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать ещё один кусок).

б) [4] Докажите, что если $R > 0{,}5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.

в) [4] На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0{,}6$? (*А. Толпыго*)

Ответ. **в**) 6. **Решение**.

а) Исходный кусок разрежем, например, в отношении $3 : 2$.

Пусть у нас уже есть несколько кусков весов $2d > 2c > ... > b > a$, удовлетворяющих условию задачи, то есть $a > d$ (возможно, что кусков всего два или три, тогда некоторые веса выписаны дважды). Покажем, что можно сделать ещё один шаг с сохранением условий. Выберем положительное $h < \min(a - d, d - c)$. Разрежем бОльший кусок на куски веса $d + h$ и $d - h$. Тогда $d + h < a$ и $d - h > c$, то есть для кусков $2c > ... > b > a > d + h > d - h$ условия по-прежнему выполнены.

б) Будем считать, что вес исходного куска равен 1. Пусть на некотором этапе у нас есть k кусков, причём самый большой из них имеет вес M. Поскольку каждый из остальных кусков больше $^M/_2$, то сумма всех весов равна 1 и больше $M(1 + {}^{k-1}/_2) = {}^{(k+1)M}/_2$, то есть $M < {}^2/_{k+1}$.

Пусть процесс продолжается неограниченно долго. В силу доказанного неравенства каждый кусок рано или поздно будет разрезан. Поскольку $2R > 1$, то найдётся такое натуральное n, что $(2R)^n > 2$. Зафиксируем веса кусков на момент, когда есть $n + 1$ кусок, и продолжим разрезания, пока все *фиксированные* веса не будут разрезаны. Пусть $a \ge b$ – соседние фиксированные веса. Так как $R >0{,}5$, то каждый раз мы режем самый большой кусок M, иначе обе части не будут больше RM. Поэтому, когда a будет разрезан, b еще цел. Пусть a разрезан на части веса c и d. По условию $c > Rb$ и $d > Rb$, а $a > 2Rb$. Написав аналогичные неравенства для всех фиксированных весов, получим что отношение наименьшего фиксированного веса m к наибольшему фиксированному весу M меньше $(2R)^{-n} < ½ < R$. Противоречие.

в) *Пример*.

$122 \to \{72, 50\} \to \{50, 40, 32\} \to \{40, 32, 25, 25\} \to \{32, 25, 25, 20, 20\} \to \{25, 25, 20, 20, 16, 16\}$.

Оценка.

Допустим, получилось семь кусков. Зафиксируем момент, когда было четыре куска: $d \ge c \ge b \ge a$. Затем был последовательно разрезано три куска. Как показано в **б**), на каждом шаге разрезается наибольший кусок. Значит, сначала был разрезан кусок веса d – пусть на куски $x \ge y$. Поскольку $y > {}^3/_5x$, то $x < {}^8/_5d < {}^5/_3d < a$.

Следовательно, на этом момент наибольшим куском стал c, и разрезан будет он. Аналогично после этого будет разрезан кусок b. По доказанному в пункте **б**), $d >2Rc = 1{,}2c$. Аналогично $c > 1{,}2b$, $b > 1{,}2a$. Отсюда $a < ({}^5/_6)^3\ d < 0{,}6d$. Противоречие.

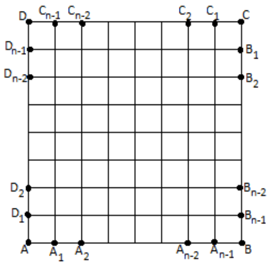
6. [10] Дан треугольник ABC. Пусть I – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB, а A_1 и B_1 – точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и AC соответственно. Пусть M – середина отрезка IC, а отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки N, B_1, A и M лежат на одной окружности. (*Ф. Ивлев*)

Решение. Будем использовать стандартные обозначения a, b, c и p для длин сторон и полупериметра треугольника ABC.

Пусть первая вневписанная окружность касается прямой BC в точке K. Поскольку M – медиана прямоугольного треугольника CKI, то при повороте на угол $\varphi = 180^\circ - \angle C$ прямая BC переходит в прямую AC. При этом точка K переходит в C, точка B – в B_1, а точка A_1 – в A (как известно, $KB = CB_1 = p - a$, $BA_1 = B_1A = p - c$). Поэтому $MA = MA_1$, $MB = MB_1$.

Равнобедренные треугольники A_1MA и B_1MB подобны (у обоих углы при вершине M равны φ). Значит, $\angle MAN = \angle MAA_1 = \angle MB_1B = \angle MB_1N$, что и требовалось.

7. [10] Город имеет вид квадрата $n\times n$, разбитого на кварталы 1×1. Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идёт из юго-западного угла в северо-восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за n дней он пройдёт все улицы целиком. (*М. Дидин*)



Решение. На каждом ребре сетки (отрезке улицы) поставим стрелки в направлениях на север или восток. Пусть город – квадрат $ABCD$, где A – юго-западная вершина, B – юго-восточная. Назовём *весом* узла сетки минимум из длин пути по сетке от него до вершин A и C. Во все внутренние узлы, а также в B и D стрелок входит и выходит поровну (назовём эти узлы *равновесными*), в узлы на интервалах BC и CD входят две, выходит одна (назовём эти узлы *финальными*, обозначим их B_k на BC и C_k на CD, где k – вес), а в узлы на интервалах AB и AD входит одна, выходят две стрелки (назовём эти узлы *стартовыми,* обозначим их A_k на AB и D_k на AD, см. рис). Пути из A в C идут по стрелкам. Пути из C в A идут против стрелок, но их тоже будем считать путями по стрелкам из A в C. Каждый путь имеет длину $2n$, веса узлов на нем сначала возрастают от 0 до n, затем убывают от n до 0.

Будем нумеровать дни, начиная с 0, а также считать, что пройденные рёбра окрашиваются в синий цвет (исходный цвет рёбер – чёрный). Докажем индукцией по k, что в k-й день станут синими ровно $4(n-k)$ рёбер, после этого все рёбра, инцидентные узлам веса не более k, будут синими, а все синие рёбра, инцидентные узлам веса больше k, будут пройдены только по разу.

База ($k = 0$). Проведём любой путь из A в C. Заведомо есть ещё один путь из A в C по ещё не пройденным стрелкам, например, симметричный предыдущему относительно прямой AC. Проведём любой такой путь. Все четыре ребра, инцидентные A и C (то есть узлам веса 0) пройдены. Каждый из узлов веса 1 имеет степень 3, через каждый прошел один путь.

Шаг индукции. Пусть настал k-й день. Первые k звеньев любого пути выходят из узлов с весами от 0 до $k-1$. По предположению индукции они пройдут по синим рёбрам. То же верно для k последних звеньев. Значит, на пути может быть не более $2(n-k)$ чёрных рёбер. Докажем, что есть путь, где таких рёбер ровно $2(n-k)$.

На сторонах квадрата остались узлы веса не меньше k и степени 3. По предположению индукции через них не могли пройти два пути, поэтому каждой из них инцидентна хотя бы одна чёрная стрелка (выходящая для A_i и D_i, входящая для B_i и C_i). При этом в узлах степени 3 веса k осталось ровно по одной инцидентной стрелке, поскольку ребро, соединяющее его с узлом веса $k-1$ по предположению индукции синее.

Стартуем из A_{n-1} и будем идти по чёрным стрелкам, пока не дойдём до B_{n-1} или не зайдём в тупик. Тупиком может быть только финальный узел F. Пусть он отличается от от B_{n-1}. Ломаная $A_{n-1}F$ разбивает город на две части, и у части с узлом B_{n-1} нет стартовых узлов на границе, кроме A_{n-1}. Выйдем из B_{n-1} и будем идти против чёрных стрелок, пока не дойдём до ломаной $A_{n-1}F$. Далее по ломаной дойдём до A_{n-1}. Получим путь $A_{n-1}B_{n-1}$. Временно сотрём его звенья. После этого узлы A_{n-1} и B_{n-1} станут равновесными (а равновесные ранее узлы так и останутся равновесными). Аналогично строим путь $A_{n-2}B_{n-2}$: стартуем из A_{n-2}, получаем путь $A_{n-2}F$, если F не B_{n-2}, то стартуем задним ходом из B_{n-2} и дойдём до ломаной $A_{n-2}F_{n-2}$, потому что все неравновесные стартовые узлы лежат за этой границей. И т.д.

Построив путь A_kB_k (и восстановив стёртые рёбра), мы получим путь AA_kB_kC с ровно $2(n - k)$ чёрными рёбрами. Человек не обязан выбирать именно его, но ему придётся выбрать путь П, чёрная часть которого начинается в A_k или D_k и заканчивается в B_k или C_k. Действительно, $2k$ путей, пройденные в первые k дней, прошли через $2k$ узлов веса k и окрасили $8k$ инцидентных им рёбер (по предположению индукции все эти рёбра различны). Но всего у нас есть 4 узла веса k степени 3 и $2(k - 1)$ степени 4. Им инцидентны $8k + 4$ ребра. Как показано выше, все эти четыре ребра инцидентны узлам степени 3.

Окрасим путь П в синий цвет и обозначим те две из четырёх вышеперечисленных узлов, которые не стали концами П, A' и B'. Докажем, что остался путь из A' в B' по чёрным рёбрам. Для этого, как и раньше, последовательно строим пути $A_{n-1}B_{n-1}$, $A_{n-2}B_{n-2}$, …, $A_{k+1}B_{k+1}$, $A'B'$. Значит, человек выберет один из путей, проходящий через A' и B'. Окрасив его в синий цвет, мы, в частности, сделаем синими последние четыре чёрных ребра, инцидентные узлам веса k.

В силу доказанного за n дней будет пройдено всего $4(n + (n - 1) + ... + 1) = 2n(n +1)$ рёбер, что совпадает с общим числом рёбер сетки.