39-й Международный математический Турнир городов

2017/18 учебный год

Решения задач

Весна

Базовый вариант

Младшие классы

1. На доске 6×6 расставили шесть не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьёй поле покрасили по такому правилу: если ладьи, угрожающие этому полю, находятся от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном – то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться

а) [1] красными;

б) [2] синими? (*И. Акулич*)

Ответ. Могли. **Решение**. Клетка будет красной, если бьющие её ладьи стоят на одной диагонали, и синей – в противном случае.

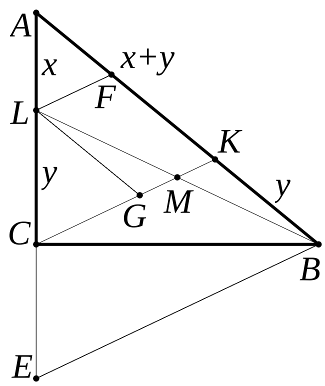
а) Расставим ладей на главной диагонали.

б) Ладьи должны быть не бьющими друг друга ферзями. См. рис.

Замечание. Примеры единственны с точностью до симметрий.

		Л			
					Л
	Л				
				Л	
Л					
			Л		

2. [4] На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку K, а на катете AC – точку L так, что $AK = AC$, $BK = LC$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник CLM равнобедренный. (*Е. Бакаев*)



Решение 1. Поскольку в прямоугольном треугольнике CLB медиана, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы, достаточно доказать, что M – середина LB.

Первый способ. Отметим на отрезке AK точку F так, что $AF = AL$. Тогда $FL \parallel KC$ и $FK = LC = KB$. Значит, KM – средняя линия треугольника LFB, и $LM = MB$.

Второй способ. Проведём через точку L прямую, параллельную AB, до пересечения с CK в точке G. Так как треугольник CAK равнобедренный, то и CLG – тоже. Поэтому $LG = LC = BK$ и $LGBK$ – параллелограмм. Следовательно, M – середина LB.

Третий способ. Поместим в точки C, A и B массы $x = AL$, $y = LC$ и $x + y$ соответственно. Тогда L – центр масс точек A и C, а K – точек A и B. Поэтому общий центр масс лежит на пересечении отрезков BL и CK, то есть в точке M. Группируя точки A и C, получим точку L с массой $x + y$. Поскольку у L и B равные массы, то M – середина LB.

Решение 2. Проведём через точку B прямую, параллельную CK, до пересечения с прямой AC в точке E. Так как треугольник ACK равнобедренный, то и AEB – тоже. Поэтому $EC = BK = LC$. Таким образом, BC – высота и медиана треугольника ELB, значит, он – равнобедренный. Подобный ему треугольник CLM – тоже равнобедренный.

Решение 3. Проведём через точку B прямую l, параллельную AC, и продлим CK до пересечения с l в точке P. Заметим, что треугольник KBP равнобедренный: $\angle KPB = \angle ACK$ (накрест лежащие), а $\angle PKB = \angle AKB$ (вертикальные) $= \angle ACK$ (так как $AK=AC$). Но тогда $BP=BK=LC$, то есть $LCBP$ – прямоугольник. Но диагонали прямоугольника делят его на равнобедренные треугольники, так что LMC – равнобедренный.

3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить

а) [2] хотя бы одно скрытое число;

б) [2] хотя бы два скрытых числа? (*Е. Бакаев*)

1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

Ответ. **а**) Можно; **б**) Нельзя. **Решение**. **а**) Пусть в правом нижнем углу находится число x. Сумма чисел в двух средних столбцах равна сумме чисел в двух крайних строках. Поэтому $4 + 5 + 6 + 7 = 1 + 2 + 3 + x$, то есть, $x = 16$.

б) Рассмотрим любой подходящий набор из восьми неизвестных ещё чисел. Добавим к каждому из них по 1. Суммы чисел в рядах увеличатся на 2, значит, останутся равными. Следовательно, ни одно из этих восьми чисел восстановить нельзя.

Замечание. Подходящие расстановки существуют. Больше нельзя восстановить ни одного числа даже в случае, когда сумма в рядах известна.

Действительно, к любой таблице можно без изменения сумм в рядах добавить следующую таблицу:

0	1	–1	0
–1	0	0	1
1	0	0	–1
0	–1	1	0

4. [4] Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны? (*Б. Френкин*)

Ответ. Обязательно.

Решение 1. Пусть эти числа x, y, z. Докажем, что любое простое число p входит в разложение каждого числа в одной и той же степени – это и будет значить, что числа равны. Пусть p входит в x в степени α, в y – в степени β, в z – в степени γ. Можем считать, что $\alpha\le\beta\le\gamma$. Из того, что x делится на НОД(y,z), имеем $\alpha\ge\beta$, а из того, что НОК(x,y) делится на z, имеем $\beta\ge\gamma$. Значит, $\alpha=\beta=\gamma$, что и требовалось.

Решение 2. Обозначим через d наибольший общий делитель всех трёх чисел. Пусть эти числа равны xd, yd, zd. Тогда x, y и z взаимно просты в совокупности.

Предположим, что x делится на простое число p. Так как $[y, z]d$ делится на xd, то делится и на pd. Значит, y или z делится на p. Пусть это y. Так как zd делится на $(x, y)d$, то делится и на pd. Следовательно, x, y и z делятся на p. Противоречие.

Таким образом, $x = 1$. Аналогично $y = z = 1$, то есть исходные числа равны d.

Замечание. Справедливо более сильное утверждение: если даны $a + b – 1$ натуральных чисел, НОК любых a из которых делится на каждое, и каждое делится на НОД любых b из них, то все эти числа равны.

5. [5] На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели семь красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой? (*П. Кожевников*)

Ответ. Не могло.

Решение. Как известно (см., например, сайт problems.ru, задача 60323), n прямых разбивают плоскость максимум на $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ областей. Значит, после проведения семи красных прямых образуется не более 29 областей. В какую-то из них попадут хотя бы две точки. Отрезок, их соединяющий не пересечёт ни одну прямую, поскольку области, очевидно, выпуклы.

Замечание. Условие, что три точки не лежат на одной прямой – лишнее.

Старшие классы

1. [3] Биссектриса и высота, проведённые из одной вершины некоторого треугольника, делят его противоположную сторону на три отрезка. Может ли оказаться, что из этих отрезков можно сложить треугольник? (*М. Евдокимов*)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть CL – биссектриса, а CH – высота треугольника ABC, причём $\angle A < \angle B$. Тогда $BC < CA$.

Первый способ. По условию точка H лежит на стороне AB, поэтому угол B – острый. Поскольку $\angle BCH = 90° - \angle B < 90° - \angle A = \angle ACH$, то точка H лежит на отрезке BL. По свойству биссектрисы треугольника $BH + HL = BL < LA$, то есть для отрезков BH, HL и LA не выполнено неравенство треугольника.

Второй способ. Как известно (см., например, сайт problems.ru, задача 53115), биссектриса лежит между медианой и высотой. Поэтому $AL > {}^{AB}/_2 > LH + HB$, что противоречит неравенству треугольника.

2. [4] Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трёх. Наименьшее общее кратное каждых трёх из данных чисел делится на оставшееся четвёртое. Докажите, что произведение данных чисел – точный квадрат. (*Б. Френкин*)

Решение. Обозначим данные числа a, b, c, d. Пусть p – произвольное простое число. Степени вхождения p в данные числа обозначим α, β, γ, δ соответственно. Можно считать, что $\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \delta$.

Так как d делится на (a, b, c), то $\delta \ge \min(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma$. Значит, $\gamma = \delta$.

Так как $[b, c, d]$ делится на a, то $\beta = \max(\beta, \gamma, \delta) \ge \alpha$. Значит, $\alpha = \beta$.

Следовательно, p входит в $abcd$ в чётной степени $2\alpha + 2\delta$. Поскольку это справедливо для любого p, то $abcd$ – квадрат.

Замечание. Данные числа могут быть любыми полученного вида: каждый простой множитель должен входить в разложение двух чисел в одной степени, а в разложение других двух чисел – в другой степени (возможно, такой же). В частности, все числа могут быть различны, в отличие от задачи 4 младших классов.

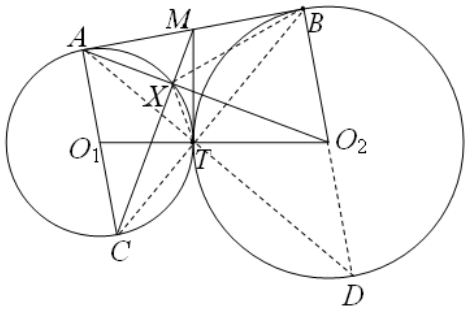
Справедливо более сильное утверждение: если даны $2n$ натуральных чисел, НОК любых $n+1$ из которых делится на каждое, и каждое делится на НОД любых $n+1$ из них, то произведение всех этих чисел – n-я степень натурального числа.

***3**. [4] Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке T. К ним проведена общая внешняя касательная, касающаяся первой окружности в точке A, а второй – в точке B. Общая касательная к окружностям, проведённая в точке T, пересекает прямую AB в точке M. Пусть AC – диаметр первой окружности. Докажите, что отрезки CM и AO_2 перпендикулярны. (*П. Кожевников*)

Решение 1. Обозначим через X точку пересечения отрезка AO_2 с первой окружностью (см. рис.). Тогда $\angle AXC = 90°$. Достаточно доказать, что точки C, X и M лежат на одной прямой, то есть что $\angle MXO_2 = 90°$.

Точки C, T и B лежат на одной прямой, поскольку $\angle CTA = \angle ATB = 90°$ ($MA = MT = MB$). Прямые AC и BO_2 параллельны, значит, $\angle TCA = \angle TBO_2$.

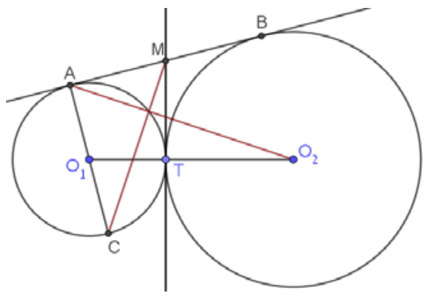
Из вписанного четырёхугольника $AXTC$ имеем $\angle TCA = \angle TXO_2$. Поэтому четырёхугольник $TXBO_2$ – тоже вписанный (X и B лежат по одну сторону от TO_2). Так как точки B и T лежат на окружности с диаметром MO_2, то и X лежит на ней, и $\angle MXO_2 = 90°$, что и требовалось.



Решение 2. Обозначим через x и y радиусы первой и второй окружностей соответственно. Хорошо известно (см., например, сайт problems.ru, задача 52700), что длина общей касательной AB равна $2\sqrt{xy}$. Ясно, что $MA = MT = MB$.

Так как $\dfrac{CA}{AM} = \dfrac{2x}{\sqrt{xy}} = \dfrac{2\sqrt{xy}}{y} = \dfrac{AB}{BO_2}$, то прямоугольные треугольники CAM и ABO_2 подобны. Так как они одинаково ориентированы, соответствующие катеты в них перпендикулярны, значит, и гипотенузы тоже. Что и требовалось.

Решение 3. Заметим, что MO_1 и MO_2 – биссектрисы углов AMT и BMT соответственно. Поэтому прямоугольные треугольники AMO_1 и BO_2M подобны. Следовательно, существует поворотная гомотетия, переводящая AMO_1 в BO_2M. Поскольку O_1 – середина AC, а M – середина AB, то C перейдёт в A. Поэтому отрезок CM переходит в AO_2, и угол между ними равен углу поворота, то есть 90°.



4. [5] В углу шахматной доски 8×8 стоит фишка. Петя и Вася двигают фишку по очереди, начинает Петя. Он делает фишкой один ход как ферзём (пройденной считается только клетка, куда в итоге переместилась фишка), а Вася – два хода как королём (обе клетки считаются пройденными). Нельзя ставить фишку на клетку, где она уже бывала (включая исходную клетку). Кто не сможет сделать ход – проигрывает. Кто из ребят может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Вася. **Решение**. Разобьём доску без стартовой клетки на трёхклеточные уголки. Хорошо известно, что это возможно (см., например, сайт problems.ru, задача 35522). Васина стратегия – делать оба хода внутри того уголка, куда пошёл Петя. Тогда перед Петиным ходом каждый уголок либо полностью открыт, либо полностью закрыт. Таким образом, у Васи всегда есть оба хода, и он выиграет, так как игра конечна.

Замечание. Ничего не изменится, если поменять клетку старта.

5. [5] В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три грани. Каждая грань покрашена в красный, жёлтый или синий цвет. Докажите, что число вершин, в которых сходятся грани трёх разных цветов, чётно. (*Е. Бакаев, А. Грибалко, И. Раскина*)

Решение 1. Посмотрим на трёхцветную вершину. Из неё выходит ровно одно красно-жёлтое (принадлежащее красной и жёлтой грани) ребро. Пойдём по нему. В другом его конце сходятся красная и жёлтая грани. Если третья грань синяя, то это трёхцветная вершина, из которой не выходит других красно-жёлтых рёбер. Иначе из этой вершины выходит ещё ровно одно красно-жёлтое ребро. Пойдём по нему. Так, ходя по красно-жёлтым рёбрам, мы упрёмся в итоге в трёхцветную вершину, поскольку в пройденные вершины вернуться не можем. Таким образом, трёхцветные вершины разбиваются на пары – концы красно-жёлтых путей.

Решение 2. Покажем, что при перекрашивании граней чётность количества трёхцветных вершин не меняется. Это решит задачу, поскольку так мы можем сделать весь многогранник одноцветным, для которого утверждение задачи очевидно.

Пусть какую-то красную грань мы перекрасили в жёлтый цвет. Смежные ей грани образуют цикл. Каждой паре соседних граней в нём соответствует одна вершина – общая с перекрашенной гранью. Заметим, что вершина поменяет свою трёхцветность (с «да» на «нет», или наоборот) тогда и только тогда, когда она соответствует паре граней синяя-несиняя. Ясно, что таких пар чётное число, что и завершает доказательство.

Решение 3. Рассмотрим граф многогранника и удалим в нём все одноцветные рёбра. Тогда степени трёхцветных вершин станут равны трём, двуцветных – двум, одноцветных – нулю. По лемме о рукопожатиях в графе чётное число нечётных вершин, то есть трёхцветных.

Сложный вариант, младшие классы

1. [4] В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма каждых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел? (*Б. Френкин*)

Ответ. Плюс. **Решение**. Рассмотрим любое число с нечётным номером. Остальные числа разбиваются на пары соседних. Значит, их сумма положительна, поэтому рассматриваемое число отрицательно. Числа с чётными номерами должны быть положительными, чтобы суммы в парах с ними были положительными. Поэтому выписано 20 отрицательных чисел и 19 положительных, их произведение положительно.

Замечание. Такая строка чисел существует, например: –20, 21, –20, …, 21, –20.

2. [5] У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать? (*А. Перепечко*)

Ответ. Не мог. **Решение 1**. Пусть у Аладдина было $1000 + x$ слитков. После просьбы их станет $1000 + \frac{x}{2}$, а после десяти просьб – $1000 + \frac{x}{2^{10}}$. Следовательно, x делится на 1024. Так как $x \geq -1000$, то $x \geq 0$. Поэтому количество слитков не увеличилось.

Решение 2. Если после просьбы у Аладдина оказалось x слитков, то до просьбы их было $2x - 1000$. Поэтому, если в конце у Аладдина a слитков, то в начале их было $2(2(\ldots(2a - 1000)\ldots) - 1000) - 1000 = 2^{10}a - 1000(2^9 + \ldots + 2 + 1) = 2^{10}a - 1000(2^{10} - 1)$.

Если $2^{10}a - 1000(2^{10} - 1) < a$, то $a < 1000$. С другой стороны,

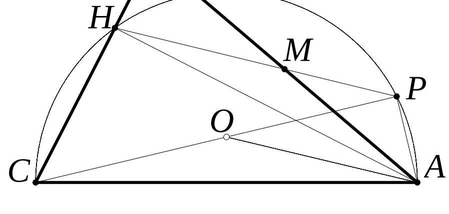
$a > \dfrac{1000(2^{10}-1)}{2^{10}} = 1000\left(1 - \dfrac{1}{1024}\right) > 999$. Противоречие, поскольку a – целое число.

3. [6] Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности каждых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей? (*М. Дидин*)

Ответ. Существуют. **Решение 1**. Рассмотрим дроби $\frac{1+q}{q}, \frac{2+q}{2q}, \ldots, \frac{2018+q}{2018q}$, где $q = 2018! + 1$. Они несократимы, так как $(q, i) = 1$ при $1 \leq i \leq 2018$. Разность таких дробей равна $\frac{i+q}{iq} - \frac{j+q}{jq} = \frac{j-i}{ij}$. Её знаменатель меньше q, а в несократимом виде – тем более.

Решение 2. Выберем любые 2018 положительных несократимых дробей со знаменателями $b_1 > b_2 > \ldots > b_{2018} > 0$. Выберем ещё одну положительную несократимую дробь вида $1/d$, знаменатель d которой больше b_1b_2 и взаимно прост с $b_1b_2\ldots b_{2018}$. Прибавим к каждой из 2018 дробей новую дробь. Полученные суммы искомые, так как их знаменатели в несократимом виде будут равны db_i, а у разностей – не больше b_1b_2.

4. [6] Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH – его высота. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину стороны AB. (*Е. Бакаев*)



Решение. $\angle B = ½\angle AOC = 90° - \angle OCA = \angle PAC = {=}\angle PHB$ (последнее равенство следует из очевидной вписанности четырёхугольника $APHC$). Значит, луч HP отсекает от прямоугольного треугольника ABH равнобедренный треугольник BMH. Поэтому M – середина AB.

Замечание. Точка P может лежать и внутри треугольника ABC, на отрезке OC или вне его. Решение годится для всех случаев. Утверждение задачи верно и для неостроугольного треугольника.

5. [8] На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой – с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n. Найдите наименьшее возможное значение n. (*М. Дидин*)

Ответ. 197.

Решение 1. *Пример.* Пусть на правой стороне номера равны 2, 4, 6, …, 98, 100, а на левой – 1, 5, 9, …, 193, 197. Разности равны 1, –1, –3, …, –97 и различны, наибольший номер дома равен 197.

Оценка. Подойдём к первому дому на какой-то стороне. Пойдём вдоль улицы, потом около некоторого дома перейдём к противоположному дому, потом продолжим идти вдоль улицы, потом опять у некоторого дома перейдём к противоположному и дойдём до конца. Пока мы шли вдоль улицы, номер каждого следующего дома был хотя бы на 2 больше предыдущего. Значит, разница номеров домов в начале и в конце улицы не меньше, чем $2 \cdot 49$ плюс разности номеров в двух парах домов, у которых мы перешли улицу. Покажем, что можно выбрать начальную сторону улицы и две пары домов так, чтобы эти две разности в сумме давали не меньше 98. Тогда мы получим, что у последнего дома номер не меньше $1 + 98 + 98 = 197$.

Действительно, все разности нечётны и различны, поэтому найдутся две, которые отличаются хотя бы на 98. Улицу нужно пересекать как раз у пар домов с этими разностями. Если меньшая из двух разность расположена ближе к началу улицы, чем бОльшая, то нужно начинать обход с чётной стороны. Тогда при переходе улицы она войдёт в сумму с минусом, а бОльшая – с плюсом. Если меньшая разность дальше от начала, то нужно начинать с нечётной стороны.

Решение 2. *Пример*. Пусть на каждой стороне улицы номера образуют арифметическую прогрессию: на правой – 2, 4, …, 100, а на левой – 1, 5, …, 197. Тогда разности образуют арифметическую прогрессию с шагом 2, то есть будут различны.

Оценка. Пусть $b_1 < \ldots < b_{50}$ – чётные номера, $a_1 < \ldots < a_{50}$ – нечётные номера, $d_k = b_k - a_k$. Заметим, что все эти разности нечётны. Пусть наименьшая наименьшая разность $d_i = d$, а наибольшая $d_j = D$. Тогда $D \geq d + 2\cdot 49$.

Если $i > j$, то $a_i = b_i - d \geq b_j + 2(i - j) - d$, а $a_i - a_j \geq D - d + 2(j - i) \geq 2(j - i) + 2\cdot 49$. Поэтому $a_{50} - a_1 \geq 2\cdot 49 + 2\cdot 49 = 196$, откуда $a_{50} \geq 197$.

Если $i < j$, то аналогично $b_{50} \geq 198$.

6. [10] В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя. Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.) (*М. Дидин*)

Ответ. Два вопроса. **Решение**. *Пример*. Первый вопрос зададим из произвольной точки. Если все ответы на него одинаковы, то все сидящие за столом – лжецы, поскольку рыцарь и лжец дают разные ответы.

В противном случае найдутся соседи, ответившие по разному. Встанем в середину дуги между ними. Так как хотя бы один из двоих – лжец, то до ближайшего лжеца расстояние известно. Тогда те, кто его назовёт – рыцари, а остальные – лжецы.

Оценка. Пусть был задан только один вопрос. Разобьём людей на группы находящихся на одинаковом расстоянии от путешественника. Будет больше одной группы, поскольку нельзя вставать в центр стола. Пусть ближайшая группа указала на следующую за ней, а остальные – на первую. Легко видеть, что первая группа могла оказаться рыцарями, а остальные – лжецами, но могло быть и наоборот.

7. [12] В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$. (*Н. Белухов*)

Решение. Рассмотрим некоторые выражения.

$$(a\,!\,a)\ ?\ (a\,!\,a) = \left[\begin{array}{l}(a+a)-(a+a)\\(a-a)+(a-a)\end{array}\right. = 0.$$

Значит, мы умеем получать 0 и можем использовать его в дальнейшем.

$$(a\,!\,0)\,!\,(0\,!\,b) = \left[\begin{array}{l}(a+0)+(0+b)\\(a-0)-(0-b)\\(b-0)-(0-a)\end{array}\right. = a+b.$$

Выражение (0 ! a) ! 0 равно a, если «!» – сумма, и $0 - a - 0$ или $0 - (a - 0)$, то есть $-a$, если «!» – разность. Поэтому

$$(0\ ?\ ((0\,!\,a)\,!\,0))\ ?\ 0 = \left[\begin{array}{l}-(+a)\\+(-a)\end{array}\right. = -a.$$

Таким образом, мы научились складывать и брать противоположное число. Значит, можно получить любую линейную комбинацию a и b с целыми коэффициентами.

Решение 2. Заметим, что обе операции – это сумма, только какое-то слагаемое может быть умножено на –1. Поэтому при вычислении не будем переставлять слагаемые местами. Всего есть четыре варианта набора операций. Вариант «?Л», например, означает, что при выполнении «?» на –1 умножается **Л**евое слагаемое.

Пусть x и y – какие-то выражения. Рассмотрим, чему равно выражение x ? (y ! y) ! y ? y ! y (считаем, что операции выполняются слева направо).

?Л: $-(-x + 2y + y) + y + y = x - y$.

?П: $x - 2y + y - y + y = x - y$.

!Л: $-(-(x + 0) + y + y) + y = x - y$.

!П: $x + 0 - y + y - y = x - y$.

Значит, мы умеем вычислять обычную разность. Тогда мы умеем вычислять и сумму, поскольку $x + y = x - (x - x - y)$. Следовательно, можно получить любую линейную комбинацию a и b с целыми коэффициентами.

Решение 3. Как и в решении 1, получим нуль. Введём новые операции: $x * y = x\,!\,y\,!\,0$ и $x\,\&\,y = x?\,y\,?\,0$. Заметим, что одна из них (но неизвестно какая) – сумма, а другая – обычная разность. Тогда $x + y = x * (0 * y)$ и $x - y = x * (0\,\&\,y)$. Следовательно, все линейные комбинации можно получить.

Сложный вариант, старшие классы

1. [4] У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать? (*А. Перепечко*)

Ответ. Не мог. **Решение 1**. Пусть у Аладдина было $1000 + x$ слитков. После просьбы их станет $1000 + \frac{x}{2}$, а после десяти просьб – $1000 + \frac{x}{2^{10}}$. Следовательно, x делится на 1024. Так как $x \geq -1000$, то $x \geq 0$. Поэтому количество слитков не увеличилось.

Решение 2. Если после просьбы у Аладдина оказалось x слитков, то до просьбы их было $2x - 1000$. Поэтому, если в конце у Аладдина оказалось a слитков, то в начале их было

$2(2(\ldots(2a - 1000)\ldots) - 1000) - 1000 = 2^{10}a - 1000(2^9 + \ldots + 2 + 1) = 2^{10}a - 1000(2^{10} - 1)$.

Если $2^{10}a - 1000(2^{10} - 1) < a$, то $a < 1000$.

С другой стороны, $a > \frac{1000(2^{10}-1)}{2^{10}} = 1000\left(1 - \frac{1}{1024}\right) > 999$. Противоречие, поскольку a – целое число.

2. [5] Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности каждых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей? (*М. Дидин*)

Ответ. Существуют. **Решение 1**. Рассмотрим дроби $\frac{1+q}{q}$, $\frac{2+q}{2q}$, …, $\frac{2018+q}{2018q}$, где $q = 2018! + 1$. Они несократимы, поскольку $(q, i) = 1$ при $1 \leq i \leq 2018$. Разность таких дробей равна $\frac{i+q}{iq} - \frac{j+q}{jq} = \frac{j-i}{ij}$. Её знаменатель меньше q, а в несократимом виде – тем более.

Решение 2. Выберем любые 2018 положительных несократимых дробей со знаменателями $b_1 > b_2 > \ldots > b_{2018} > 0$. Выберем ещё одну положительную несократимую дробь, знаменатель d которой больше b_1b_2 и взаимно прост с $b_1b_2\ldots b_{2018}$. Прибавим к каждой из 2018 дробей новую дробь. Полученные суммы будут искомыми, поскольку их знаменатели в несократимом виде будут равны db_i, а у разностей – не больше b_1b_2.

3. [6] В таблице 10×10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нём симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180°»). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце – снизу вверх? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Всегда. **Решение**. Покрасим все числа в красный цвет. На каждом ходу будем поворачивать некий красный прямоугольник, после чего перекрашивать одно число в зелёный цвет. Таким образом, зелёные числа больше не будут перемещаться. Будем поддерживать свойства: 1) каждое зелёное число меньше всех красных; 2) в каждой строке слева направо и в каждом столбце снизу вверх сначала идут зелёные числа по возрастанию, а потом – красные числа в произвольном порядке. После 99 таких ходов останется только одно красное число в правом верхнем углу, и требуемое в задаче будет достигнуто.

Изначально свойства выполнены. Пусть перед очередным ходом свойства выполняются и наименьшее из красных чисел – x – стоит в клетке A. Будем двигаться вниз от клетки A по красным числам, пока возможно, до клетки B. От клетки B – аналогично влево до клетки C. Возьмём прямоугольник $ABCD$ (возможно, вырожденный). Он будет красным. Повернём его. Число x окажется в клетке C. Числа слева и снизу от него, если есть, – зелёные, и они меньше x. Перекрасим x. Все свойства, очевидно, выполнены.

4. Правильный треугольник, лежащий в плоскости α, ортогонально спроектировали на непараллельную ей плоскость β, полученный треугольник ортогонально спроектировали на плоскость γ и получили снова правильный треугольник. Докажите, что

а) [4] угол между плоскостями α и β равен углу между плоскостями β и γ;

б) [4] плоскость β пересекает плоскости α и γ по перпендикулярным друг другу прямым. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть плоскости α и γ пересекают плоскость β по прямым a и b и составляют с ней углы φ и ψ соответственно. Совместим α с β поворотом на угол φ вокруг a. Аналогично совместим γ с β. Тогда всё происходит в плоскости β. Сначала происходит сжатие к прямой a с коэффициентом $\cos\varphi$, а потом – сжатие к прямой b с коэффициентом $\cos\psi$. Очевидно, что a и b не параллельны.

Сжатие – аффинное преобразование. Поскольку композиция этих преобразований – тоже аффинное преобразование – перевела исходный правильный треугольник в подобный, то она – подобие. У этого подобия есть неподвижная точка – точка O пересечения прямых a и b.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. **б**) Предположим, a и b не перпендикулярны. Пусть точки X и Y лежат на a и b соответственно и угол XOY острый. После первого сжатия X остаётся на месте, а Y переходит внутрь угла XOY. После второго – обе точки оказываются внутри угла XOY. То есть угол уменьшился, это не подобие, противоречие.

а) Так как угол XOY прямой, то он переходит в себя при композиции данных сжатий. Значит, это гомотетия с положительным коэффициентом k. Будем считатьвекторы $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$ базисными. Точка (x, y) перейдёт сначала в $(x, y\cos\varphi)$, затем – в $(x\cos\psi, y\cos\varphi) = (xk, yk)$. Значит, $\varphi = \psi$.

Второй способ. (*Идея Zhi Kin Loke*) Рассмотрим описанную окружность Ω исходного треугольника. Первая проекция переводит Ω в эллипс, большая ось которого параллельна прямой a. Длина этой оси равна диаметру d окружности Ω, а длина малой оси равна $d\cos\varphi$.

Поскольку композиция двух наших проекций – подобие, эллипс при второй проекции перейдёт в окружность ω. Все диаметры эллипса (хорды, проходящие через его центр), станут диаметрами окружности ω. Их длины уменьшатся, кроме хорды, параллельной прямой b. Поэтому малая ось параллельна b и сохранит свою длину, а длина большой оси умножится на $\cos\psi$. Отсюда следует как перпендикулярность прямых a и b (параллельных осям эллипса), так и равенство $d\cos\varphi = d\cos\psi$, то есть равенство углов φ и ψ.

5. [10] В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$. (*Н. Белухов*)

Решение. Рассмотрим некоторые выражения.

$$(a \,!\, a) \,?\, (a \,!\, a) = \left[\begin{array}{l}(a+a)-(a+a)\\(a-a)+(a-a)\end{array}\right. = 0.$$

Значит, мы умеем получать 0 и можем использовать его в дальнейшем.

$$(a \,!\, 0) \,!\, (0 \,!\, b) = \left[\begin{array}{l}(a+0)+(0+b)\\(a-0)-(0-b)\\(b-0)-(0-a)\end{array}\right. = a+b.$$

Выражение (0 ! a) ! 0 равно a, если «!» – сумма, и $0 - a - 0$ или $0 - (a - 0)$, то есть $-a$, если «!» – разность. Поэтому

$$(0 \,?\, ((0 \,!\, a) \,!\, 0)) \,?\, 0 = \left[\begin{array}{l}-(+a)\\+(-a)\end{array}\right. = -a.$$

Таким образом, мы научились складывать и брать противоположное число. Значит, можно получить любую линейную комбинацию a и b с целыми коэффициентами.

Решение 2. Заметим, что обе операции – это сумма, только какое-то слагаемое может быть умножено на –1. Поэтому при вычислении не будем переставлять слагаемые местами. Всего есть четыре варианта набора операций. Вариант «?Л», например, означает, что при выполнении «?» на –1 умножается **Л**евое слагаемое.

Пусть x и y – какие-то выражения. Рассмотрим, чему равно выражение x ? (y ! y) ! y ? y ! y (считаем, что операции выполняются слева направо).

?Л: $-(-x + 2y + y) + y + y = x - y$.

?П: $x - 2y + y - y + y = x - y$.

!Л: $-(-(x + 0) + y + y) + y = x - y$.

!П: $x + 0 - y + y - y = x - y$.

Значит, мы умеем вычислять обычную разность. Тогда мы умеем вычислять и сумму, поскольку $x + y = x - (x - x - y)$. Следовательно, можно получить любую линейную комбинацию a и b с целыми коэффициентами.

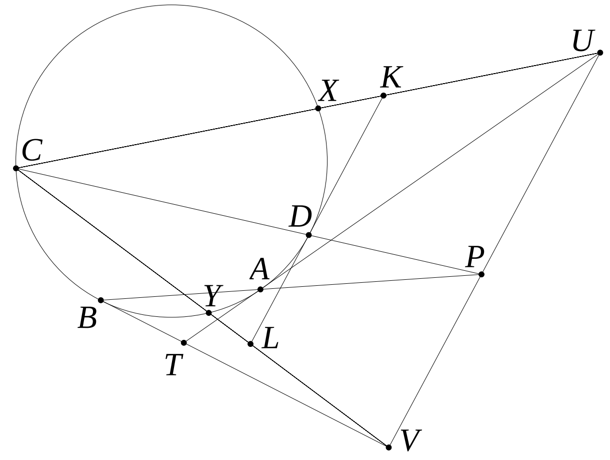
Решение 3. Как и в решении 1, получим нуль. Введём новые операции: $x * y = x$! y ! 0 и x & $y = x$? y ? 0. Заметим, что одна из них (но неизвестно какая) – сумма, а другая – обычная разность. Тогда $x + y = x * (0 * y)$ и $x - y = x * (0$ & $y)$. Следовательно, все линейные комбинации можно получить.

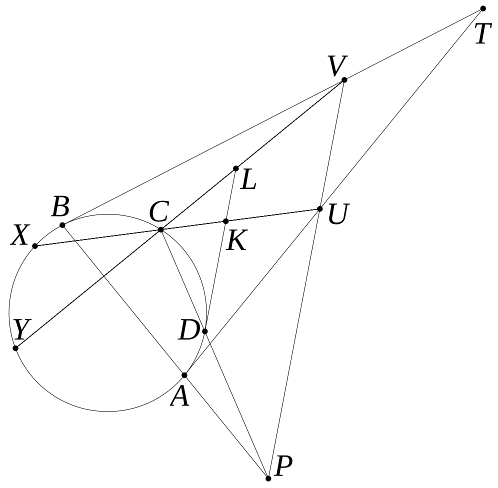
6. [10] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P и параллельная касательной к окружности в точке D, пересекает в точках U и V касательные, проведённые к окружности в точках A и B. Докажите, что окружности, описанные около треугольника CUV и четырёхугольника $ABCD$, касаются. (*А. Заславский*)

Решение. Пусть лучи UC и VC пересекают в точках K и L касательную, проведённую из точки D, и вторично окружность в точках X и Y (см. рис.). Пусть T – общая точка касательных, проведённых из A и B. Запишем теорему Менелая для треугольника UVT и прямой BP: $\frac{UP}{PV}\cdot\frac{VB}{BT}\cdot\frac{TA}{AU}=1$. Учитывая, что $BT = TA$ и $\frac{UP}{PV}=\frac{KD}{DL}$, получаем $\frac{KD\cdot VB}{DL\cdot AU}=1$ (если точка T не существует, то это равенство очевидно), то есть $\frac{UA}{KD}=\frac{VB}{LD}$.

По теореме о секущей и касательной $\frac{UX\cdot UC}{KX\cdot KC}=\frac{UA^2}{KD^2}=\frac{VB^2}{LD^2}=\frac{VY\cdot VC}{LY\cdot LC}$. Поскольку $\frac{UC}{KC}=\frac{VC}{LC}$, то $\frac{UX}{KX}=\frac{VY}{LY}$.

Следовательно, по обратной теореме Фалеса прямые XY и UV параллельны. Поэтому существует гомотетия с центром C, переводящая треугольник CXY в треугольник CUV. Значит, их описанные окружности касаются в точке C, что и требовалось.





7. [12] Король решил поощрить группу из n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут чёрную или белую шляпу. Каждый будет видеть шляпы всех впереди стоящих. Мудрецы по очереди (от последнего к первому) назовут цвет (белый или чёрный) и натуральное число по своему выбору. В конце подсчитывается число мудрецов, которые назвали цвет, совпадающий с цветом своей шляпы: ровно столько дней всей группе будут платить надбавку к жалованью. Мудрецам разрешили договориться заранее, как отвечать. При этом мудрецы знают, что ровно k из них безумны (кто именно – им неизвестно). Безумный мудрец называет белый или чёрный цвет и число вне зависимости от договорённостей. Какое максимальное число дней с надбавкой к жалованью могут гарантировать группе мудрецы, независимо от местонахождения безумных в очереди? (*И. Митрофанов*)

Ответ. $n - k - 1$. **Решение**. *Оценка*. k безумцев, очевидно, могут не угадать. Первый говорящий из *умных* также может не угадать, поскольку у него нет никакой информации о цвете его шляпы. Поэтому больше $n - k - 1$ угадываний гарантировать нельзя.

Пример. Пусть все мудрецы единообразно кодируют раскраску видимых ими шляп. Мудрец, видящий i шляп, называет число от 1 до 2^i. Если он назовёт другое число, то пусть все считают, что он назвал единицу. Тогда каждому мудрецу, кроме начинающего, сообщают цвет его шляпы все предыдущие ораторы. Вопрос только в том, кого из них слушаться, чтобы назвать свой цвет.

Назовём начинающего текущим *оракулом*. Стратегия умного мудреца – называть тот цвет, что указал ему последний оракул. Если говорящий слушается оракула, то он сам становится оракулом, иначе оракул не меняется. Так как все всё слышат, то каждый может проследить за тем, кто сейчас оракул.

Заметим, что каждый из умных будет оракулом. Каждого умного, кроме последнего говорящего из них, кто-нибудь послушается на отрезке до следующего умного включительно. Поэтому будет хотя бы $n - k - 1$ угадываний.