40-й Международный математический Турнир городов

2018/19 учебный год

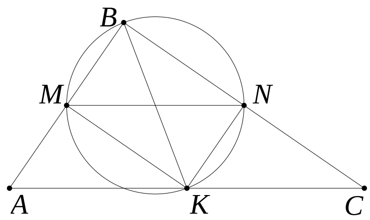
Предварительные решения задач

Осень
Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты этого треугольника в точках M и N. Оказалось, что $AC = 2MN$. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC.

Решение. Пусть M лежит на AB, а N – на BC, а точка K – середина AC. Так как угол B прямой, то MN – диаметр данной окружности. Поскольку $BK = {}^1/_2\,AC = MN$, то BK – тоже диаметр. Следовательно, $KM \perp AB$, то есть KM – средняя линия треугольника ABC. Аналогично KN – средняя линия.



2. [4] Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

Ответ. Все $n > 1$. **Решение**. $(1 + 2)$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

Первый способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1))\ldots(n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то
$(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1))\ldots((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

Второй способ. Разобьём данные числа на четвёрки подряд идущих, и, если нужно, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, а из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6) = 18^2$.

Замечания. 1. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

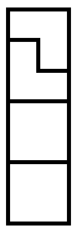
3. Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться

а) [1] столько же, сколько уголков;

б) [3] больше, чем уголков?

Ответ. **а**) Могло; **б**) не могло.

Решение. **а**) Разобьём прямоугольник на полоски из двух столбцов, а каждую из них – как показано на рисунке.



б) Докажем, что требуется хотя бы 14 уголков. Тогда квадратов будет не больше $(7\cdot 14 - 3\cdot 14) : 4 = 14$.

Первый способ. Выставляя фигурки, будем следить за чётностью количества покрытых клеток в каждом столбце. Квадраты не меняют эту чётность, а уголок меняет чётность только одного столбца. Сначала все столбцы были чётными, а должны стать нечётными. Следовательно, потребуется хотя бы 14 уголков.

Второй способ. Рассмотрим полосатую раскраску: все нечётные горизонтали – чёрные, а чётные – белые. При этом чёрных клеток на 14 больше, чем белых. Но в квадрате число чёрных клеток равно числу белых, а в уголке их количества отличаются на единицу. Следовательно, потребуется не меньше 14 уголков.

4. [5] У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?

Ответ. Может. **Первый способ**. Настя попросит провести взвешивания: $a?b$, $c?d$, $ab?cd$. С точностью до симметрии возможны четыре исхода.

1) $a > b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда a – тяжёлая, d – лёгкая.
2) $a = b$, $c > d$, $ab = cd$. Тогда c – тяжёлая, d – лёгкая.
3) $a = b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда e – тяжёлая, d – лёгкая.
4) $a = b$, $c > d$, $ab < cd$. Тогда c – тяжёлая, e – лёгкая.

Второй способ. Настя отдаст эксперту четыре монеты и попросит взвесить все три разбиения их на пары. Пусть каждая из этих монет получит метку – сколько раз она была на перевесившей чаше. Для каждого вида оставшейся монеты запишем набор меток: настоящая – 2110, лёгкая – 3111, тяжёлая – 2220. Видно, что все эти случаи различаются, и в каждом из них определяется вид обеих фальшивых монет.

Замечание. Можно доказать, что других способов у Насти нет.

5. [5] Назовём девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

Решение. Заметим, что всякое девятизначное число M равно сумме $10^6A + 10^3B + C = 999\cdot(1001A + B) + (A + B + C)$, где A, B, C – числа, образованные тремя первыми, тремя следующими и тремя последними цифрами числа M. Разобьём цифры от 1 до 9 на три тройки с суммой 15 в каждой. Если мы на первые места в числах A, B, C поставим три цифры из одной тройки, на вторые – из другой, на третьи – из оставшейся, сумма $A + B + C$ будет равна $15\cdot111 = 45\cdot37$. Так как и 999 делится на 37, то красивое число M при такой расстановке цифр будет кратно 37. Поскольку три цифры по трём местам можно расставить шестью способами и назначить три тройки на первое, второе и третье места тоже можно шестью способами, всего у нас получается $6\cdot6\cdot6\cdot6 = 1296$ красивых чисел, кратных 37. Теперь достаточно указать три тройки цифр с равными суммами. Например, $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$.

Замечание. Ср. с задачей 4 старших классов.

Старшие классы

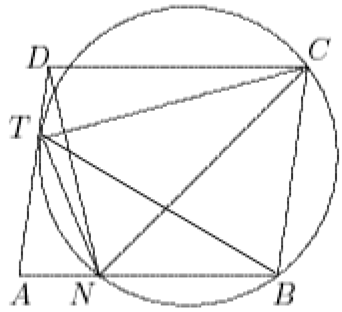
1. [3] Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом?

Ответ. Нельзя. **Решение**. Предположим, что удалось так разместить отрезок XY. По какую-то сторону от прямой XY окажутся три вершины пятиугольника – пусть A, B и C. Тогда точки A, B, C, X, Y лежат на одной окружности. Она совпадёт с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, поскольку имеет с ней три различные общие точки. Следовательно, точки X и Y лежат вне пятиугольника. Противоречие.

2. [4] Задача 2 младших классов.

3. [5] В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N, что $CN = AB$. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD. Докажите, что она касается её в точке D.

Решение. Пусть она касается её в точке T.



Первый способ. Так как $BC \parallel AD$, то $BT = CT$. Из равенства вписанных углов NBT и NCT получаем равенство треугольников ABT и NCT. Поэтому $\angle TAB = \angle TNC = \angle TBC = \angle TCB$. Следовательно, $ABCT$ – параллелограмм, то есть T совпадает с D.

Второй способ. Понятно, что точка T лежит на луче AD. Поскольку $CN = AB = CD$, то $\angle CND = \angle CDN = \angle AND$, то есть ND – биссектриса угла ANC.

С другой стороны, $\angle ATN = \angle TCN$, $\angle TAN = 180° - \angle CBN = \angle CTN$, поэтому и $\angle ANT = \angle TNC$, то есть NT – тоже биссектриса угла ANC. Так как прямые NT и ND совпадают, то и точки T и D – тоже.

Замечание. Решение не зависит от расположения точки T.

4. [5] Назовём девятизначное число красивым, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

Решение. Будем записывать красивое число $\overline{a_8 \ldots a_0}$ в виде следующей таблицы.

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то

$$\overline{a_8 \ldots a_0} = 10^8 a_8 + \ldots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}.$$

Поэтому из красивого числа, кратного d, где – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

Первый способ. Рассмотрим таблицу слева. Суммы в столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6 \cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

0	3	7
1	4	8
2	5	9

0	7	4
1	8	5
2	9	6

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2 \cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d, то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + e$ кратны d.

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) - 999x$.

Второй способ. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100 \cdot 8 + 10 \cdot 18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972.

Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5 \cdot 3 \cdot 216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5 \cdot 72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ. Рассмотрим таблицу в центре. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24 \cdot 216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

Замечание. **1**. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

5. [5] Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася – 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?

Ответ. У Васи больше. **Решение**. Каждой Петиной расстановке поставим в соответствие некоторую расстановку Васи, причём разным расстановкам – разные. Приведём два способа сделать это, для каждого из них найдётся Васина расстановка, которая этим способом не получается. Например, когда короли занимают все белые клетки в каких-то десяти горизонталях, попарно не соседних. Поэтому Васиных расстановок будет больше.

Первый способ. Назовём правую сторону Петиной доски *осью*. Рассмотрим любую расстановку Пети. Отразив всех её королей на чёрных клетках относительно оси, получим какую-то расстановку Васи: 500 королей на белых клетках доски 100×100. Действительно, короли на одной половине доски не будут бить друг друга, потому что до этого не били. А из разных половин друг друга могут бить только короли, соседние с осью отражения. Но соответствующие «чёрные» короли сдвинулись на одну клетку через ось, поэтому тоже не бьют королей со своей бывшей вертикали.

Второй способ. Разобьём каждую горизонталь Васиной доски на доминошки. Доминошки образуют доску 100×50. Как бы ни расставил Петя 500 королей в центры доминошек, Вася может сдвинуть каждого короля в белую клетку доминошки. Если после этого какие-то два короля будут бить друг друга, то они будут находиться в соседних доминошках, поэтому били друг друга и в Петиной расстановке.