40-й Международный математический Турнир городов

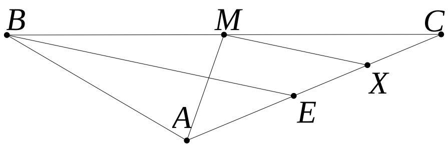
2018/19 учебный год

Предварительные решения задач

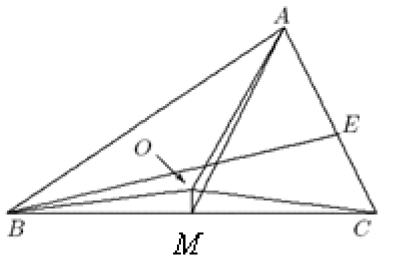
Сложный вариант

Младшие классы

1. [5] В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, точка E – произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \ge 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный. (*Н. Седракян*)



Решение 1. Пусть X – середина отрезка EC. Тогда $MX = {}^{BE}/_{2}$. Как известно, чевиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, выходящих из той же вершины (это следует, например, из свойств наклонных и проекций). По условию, $MX \ge MA$, значит, $MX < MC$. Тем более, $MA < MC$. Следовательно, точка A лежит внутри круга с диаметром BC. А это и значит, что угол A тупой.



Решение 2. Предположим, что угол A – не тупой. Тогда центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на BC или по ту же сторону от BC, что и вершина A. Значит, $2AM \ge 2AO = OB + OC \ge BC > BE$. Противоречие.

2. [6] На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова? (*М. Кузнецов*)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то не подпевал хотя бы 1009.

1009 подпевал могло быть. Например, сначала все они сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 неподпевал можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

3. [8] Требуется записать число вида 77…7, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида 77…7, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи? (*С. Маркелов*)

Ответ. Существует. **Решение 1**. $\underbrace{7\ldots7}_{n} = \frac{10^n - 1}{9} \cdot 7 = \frac{7 \cdot 10^n - 7}{9}$. Число 10 можно записать как $(77 - 7):7$, а 9 – как $7 + (7 + 7):7$. В качестве n можно взять 77 или $14 = 7 + 7$.

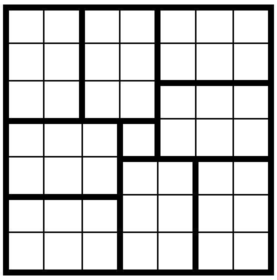
Замечание. В приведённом решении использовано 12 семёрок. Заменив $(77-7):7$ на $7+(7+7+7):7$ можно обойтись без использования двузначных чисел.

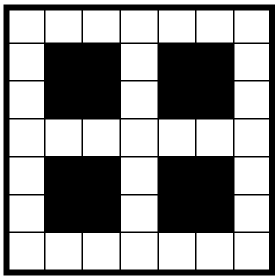
Решение 2. (*Будун Будунов*) $\underbrace{7\ldots7}_{14}\cdot\left(\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7+7}+\frac{7}{7}\right)=\underbrace{7\ldots7}_{28}$.

Замечание: В обоих решениях в качестве показателя степени можно взять любое число, десятичная запись которого состоит из более чем одной семёрки.

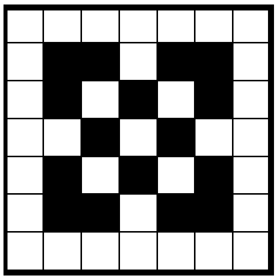
4. [8] Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает? (*Р. Женодаров*)

Ответ. 16 детекторов. **Решение**. *Оценка*. Ясно, что в каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис. слева).





Пример. На правом рисунке чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.



Замечание 1. 16 детекторов можно расположить только двумя способами. Один указан в решении, второй см. на рисунке.

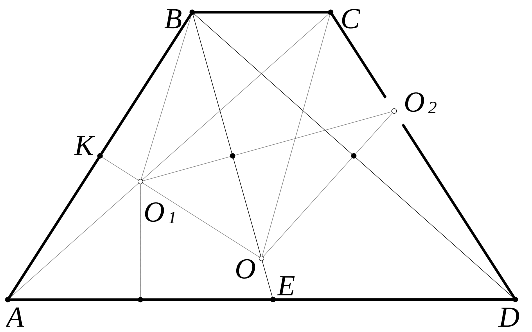
Замечание 2. Если изначально известно, что корабль обязательно есть на доске, то для гарантированного определения его положения всё равно потребуется 16 детекторов (подходит тот же пример), но доказательство оценки несколько усложняется.

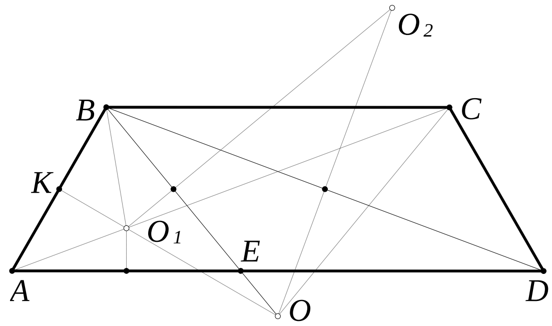
5. [8] Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности. (*А. Заславский*)

Решение. Нетрудно понять, что AD – большее основание, треугольник AEB остроугольный, и – четырёхугольники, точки C и O_2 лежат по одну сторону от прямой OO_1. Прямые OO_1, O_1O_2 и OO_2 – серединные перпендикуляры к AB, BE и BD соответственно. Пусть K – середина AB.

Первый способ. Так как $\angle BO_1O_2=\angle BAD=\angle BOO_2$ (половина центрального угла равна вписанному для треугольников BAE и BAD), то, четырёхугольник OO_1BO_2 вписанный. Поскольку $\angle KO_1B=\angle AEB=\angle CBE=\angle CBO=\angle BCO$, то четырёхугольник OO_1BC вписанный.

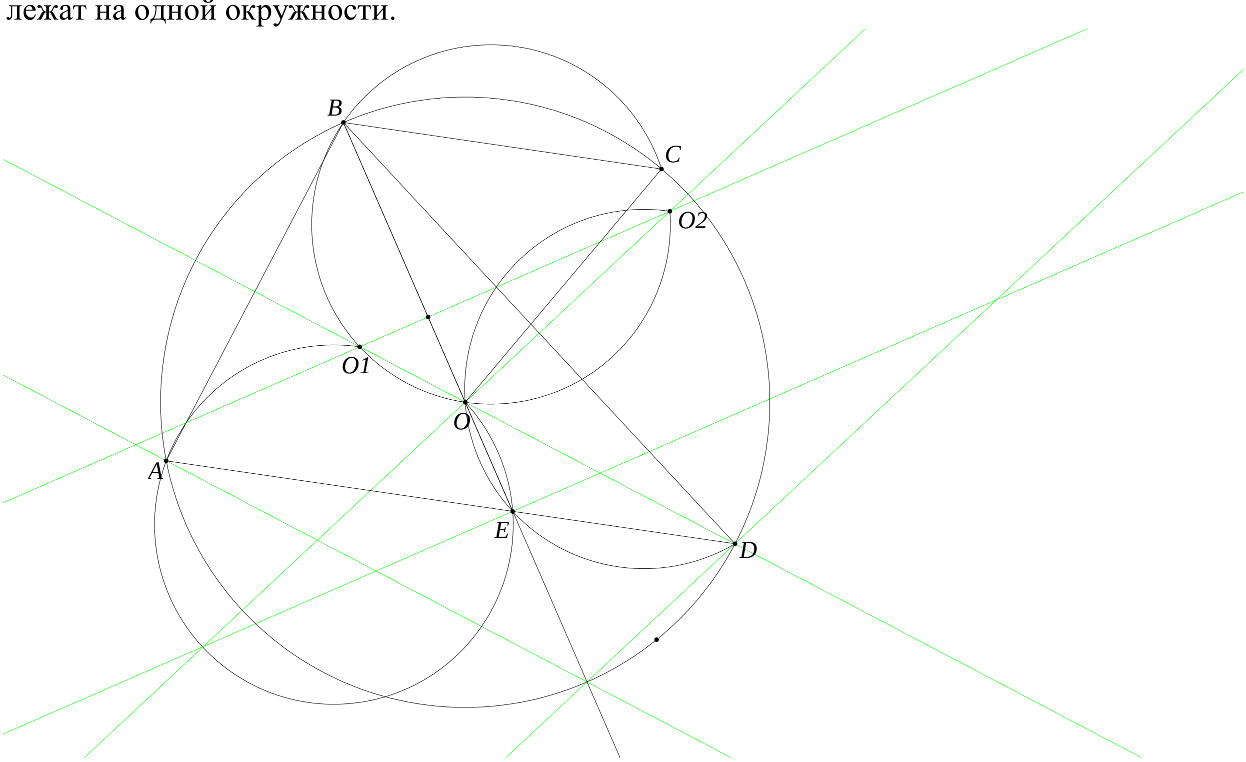
Поэтому точки O, O_1, B, C, O_2 лежат на одной окружности.





Второй способ. Заметим, что $\angle EAO_1 = 90° - \angle ABE = \angle KOB = \angle ADB = \angle CAD$. Значит, точка O_1 лежит на прямой AC. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle EBD = 90° - \angle BOO_2 = \angle OO_2O_1$. Следовательно, точки O, O_1, C, O_2 лежат на одной окружности.

Замечание. Аналогично можно показать, что точка O_2 лежит на луче (но не обязательно на отрезке) DC; точки A, E, O, O_1 лежат на одной окружности; точки D, E, O, O_2 лежат на одной окружности.

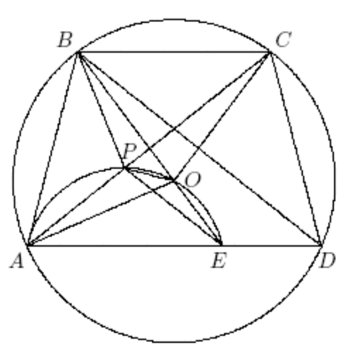


Третий способ. Рассмотрим только случай, когда точка O лежит внутри трапеции. Пусть диагональ AC пересекает описанную окружность треугольника OAE в точке P. Тогда $\angle OEP = \angle OAP = \angle OCP$, поэтому

$\angle PEA = \angle BEA - \angle OEP = \angle OCB - \angle OCP = \angle ACB = \angle PAE$.

Следовательно, $PA = PE$. С другой стороны,

$\angle BOP = \angle PAE = \angle PEA = \angle POA$. Значит, треугольники POB и POA равны, а $PB = PA$. Таким образом, точка P совпадает с O_1.



Аналогично доказывается, что точка O_2 лежит на луче CD. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle DBE = \angle OO_2O_1$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), что и требовалось.

6. Докажите, что

а) [7] любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;

б) [3] любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел. (*Н. Седракян*)

Решение. **а**) Достаточно заметить, что $k^3-(k+3)^3+(3k+5)^2=3k-2$.

б) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k-2$, и применим пункт **а**).

7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом можно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *сложным*, иначе – *простым*. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

а) [5] в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

б) [7] в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя. (*М. Дидин*)

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами – дороги.

а) Условие означает, что граф – дерево. Петя выбирает произвольную вершину. От каждой вершины существует ровно один путь в выбранную. Все рёбра на этом пути он ориентирует в сторону выбранной вершины.

Первым ходом Петя перемещает туриста в выбранную вершину (из соседней с ней). Все ориентированные пути ведут к туристу. Вася разворачивает одно ребро. Турист идёт по нему. Ясно, что все пути снова ведут к нему. Вася снова разворачивает одно ребро и так далее. Поэтому у Пети всегда есть ход и он не проиграет.

б) По условию граф связен и содержит цикл. Индукция по количеству вершин.

База – простые циклы. Пусть в простом цикле $A_1A_2\ldots A_n$ как-то расставлены стрелки на рёбрах и турист пошёл из A_1 в A_2. Вася будет разворачивать стрелки перед ним. Поэтому турист не сможет идти в обратную сторону. Допустим, турист смог дойти до A_1. Тогда перед ним разворачивают стрелку, и ему некуда идти. Петя проиграл.

Шаг индукции. Граф не является простым циклом. Выберем в нём цикл C минимальной длины. Ясно, что C – простой и не содержит ребёр внутри себя. Поэтому есть вершины вне C. Выберем из них вершину V с максимальным расстоянием до C. Обозначим граф без V буквой G. Ясно, что G связен и содержит цикл.

По предположению индукции в G есть выигрышная стратегия для Васи при любой ориентации рёбер. Внутри G Вася будет следовать ей. Так как в G Петя проигрывает, то турист вынужден будет когда-то пойти в V. Тогда Вася развернёт эту стрелку. Турист выйдет из V, а Вася сделает любой допустимый ход в G. Турист пойдёт внутри G. Сейчас у Васи опять есть выигрышная стратегия в G, которой он и будет следовать. Турист снова будет вынужден зайти в V, уменьшив количество стрелок, идущих из G в V. В конце концов они кончатся, и Петя проиграет в G, если он не проиграл раньше.

Старшие классы

1. [5] На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова? (*М. Кузнецов*)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то не подпевал хотя бы 1009.

1009 подпевал могло быть. Например, сначала все они сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 неподпевал можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

2. [7] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам. (*Фольклор*)

Решение. Заметим, что $CX : CY = BH_a : AH_b = \cos\angle B : \cos\angle A$.

Опустим перпендикуляры OD и OE на AC и BC соответственно, а также найдём на AC и BC такие точки K и L, что $CKOL$ – параллелограмм. Из подобия прямоугольных треугольников OEL и ODK получаем $CL : CK = OK : OL = OD : OE = \cos\angle B : \cos\angle A$.

Следовательно, $XY \parallel LK$, а поскольку диагональ CO параллелограмма $CKOL$ делит пополам диагональ LK, то она делит пополам и отрезок XY.

3. [6+2] **Решение**. **а**) Достаточно заметить, что $k^3 - (k+3)^3 + (3k+5)^2 = 3k - 2$.

б) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт **а**).

4. [8] Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам. (*Д. Захаров*)

Решение. Вместо клеток будем рассматривать их центры, которые назовём *узлами*. Проведём вертикальную прямую через самой левый узел бумажной фигуры. Если эта прямая не содержит других узлов фигуры, то будем поворачивать прямую по часовой стрелке до тех пор, пока на неё не попадёт ещё один узел фигуры. Мы нашли такую прямую l, содержащую не менее двух узлов фигуры, что все узлы фигуры лежат по одну сторону от l.

Каждый узел плоскости находится на каком-то ориентированном расстоянии от l (расстояния до узлов, лежащих в той же полуплоскости, что и фигура, берём со знаком минус). Пусть r – максимальное из таких расстояний до чёрных узлов. Докажем, что все узлы с расстоянием, большим r, останутся белыми. Предположим противное и рассмотрим первый такой узел, который стал чёрным. Значит, он накрыт сдвигом фигуры.

Но тогда фигура накрывает ещё хотя бы один узел с таким же расстоянием (l фиксирована, расстояния – тоже, фигура сдвигается). Так как фигура накрывает хотя бы два белых узла, то окрашивать узел нельзя. Противоречие.

Замечание. Связность фигуры-шаблона не важна. Если фигура не помещается ни в горизонталь, ни в вертикаль, то окрашено будет конечное число клеток.

5. [8] Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше 30°. Каково наибольшее возможное значение k? (*Н. Седракян*)

Ответ. $k = 3$.

Решение. *Оценка*. **Первый способ**. Пусть $h_1 \le h_2 \le h_3$ – высоты треугольника, m_1, m_2, m_3 – медианы из соответствующих вершин (на самом деле $m_1 \le m_2 \le m_3$, но это не будет использовано). Имеем $m_3 \ge h_i$, i=1,2,3. Из конца m_3 опустим перпендикуляры на смежные стороны. Каждый из них равен половине соответствующей высоты и, значит, не больше $m_3/2$. Поэтому прилегающие к ней углы не больше 30°. Аналогично один из углов при m_2 не больше 30°.

Второй способ. Пусть дан треугольник ABC с медианами AX, BY, CZ.
Оба угла BAX и BCZ не могут быть больше 30°: иначе точки A и C лежат внутри окружности с хордой ZX и диаметром, в два раза большим ZX, но при этом $AC=2ZX$, то есть отрезок, равный диаметру, лежит строго внутри окружности – противоречие. Аналогично в каждой из двух других пар максимум один угол больше 30°.

Пример. Рассмотрим сначала треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Пусть BK и CL – его медианы. Тогда $\angle ACL = 30°$, $\angle BCL = 60°$, $\angle CBK > 30°$ (поскольку биссектриса угла B проходит между катетом и медианой). Теперь чуть уменьшим катет AC. При этом угол ACL немного увеличится (то есть станет больше 30°), а углы BCL и CBK немного уменьшатся, но останутся больше 30°.

6. [9] На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки. (*И. Митрофанов*)

Решение. Пусть на числовой прямой отмечено бесконечное число натуральных точек t_1, t_2, t_3, ...

Докажем индукцией по n такое утверждение: для любого набора положительных чисел $a_1, ..., a_n$ с суммой 1 найдётся колесо такой длины S, что разделив его на дуги длин $a_1S, ..., a_nS$ (именно в таком порядке) и запустив из 0 (поставив в 0 началом первой дуги), мы обязательно получим строго внутри каждой из дуг след какой-то отмеченной точки.

Для наглядности покрасим каждую дугу в свой цвет и прокатим колесо по прямой, считая, что каждая точка прямой окрашивается в цвет дуги, которая по точке проезжает. Тогда прямая разобьётся на отрезки n разных цветов, соответствующих дугам. Нам надо найти такую длину колеса, чтобы для каждого цвета нашлась отмеченная точка, попавшая внутрь отрезка этого цвета.

Сначала заметим, что если для данного набора нужное S найдено, то подойдёт также любое колесо чуть меньшей или чуть большей длины. В самом деле, колесо длины S соберёт по отметке на каждую дугу, пройдя определённое расстояние. Это соответствует тому, что некоторые отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой каждая строго внутри отрезка своего цвета (цвета все различны). Небольшое изменение длины колеса соответствует гомотетии прямой с центром в 0 и коэффициентом, близким к 1. Понятно, что можно выбрать коэффициент гомотетии настолько близким к 1, что картина не изменится: все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ останутся внутри своих «растянутых» отрезков.

Перейдём к доказательству.

База ($n = 1$) очевидна: можно взять колесо иррациональной или просто достаточно большой длины.

Шаг индукции. Пусть для всех наборов из n чисел утверждение доказано. Докажем его для набора $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$. Рассмотрим набор $a_1, ..., a_{n-1}, a_n + a_{n+1}$. Для него нужное S найдётся. Рассмотрим момент, когда в каждой из дуг для этого набора образуется след от отмеченной точки.

Это соответствует тому, что отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой строго внутри отрезков n разных цветов, точка t_{i_n} лежит на отрезке длины $(a_n + a_{n+1})S$. Если точка t_{i_n} делит свой отрезок как раз в отношении $a_n : a_{n+1}$, увеличим немного S, чтобы все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попали на свои же «растянутые» отрезки, но точка t_{i_n} уже делила бы свой отрезок в другом отношении.

Теперь вернёмся к набору $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$, прокатим колесо найденной длины S по прямой.

Точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попадут в отрезки разных цветов, и только отрезки одного, скажем, зелёного цвета (соответствующие одной из дуг a_nS, $a_{n+1}S$, пусть дуге $a_{n+1}S$), возможно, не содержат ни одной отмеченной точки.

Заметим, что есть сколь угодно большие отмеченные точки, на расстоянии не более чем S слева от которых есть зелёный отрезок. Пусть мы можем делать гомотетию с коэффициентом, не большим $1 + \varepsilon$ так, чтобы точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ остались внутри своих «растянутых» отрезков.

Проедем колесом настолько большое расстояние K, чтобы колесо сделало целое число оборотов (последний окрашеный отрезок Z зелёный), уже собрало отметки на все дуги, кроме последней, чтобы $K\varepsilon$ было больше S, и чтобы на расстоянии не более S после точки K нашлась отмеченная точка $t_{i_{n+1}}$.

Увеличим длину колеса, сделав гомотетию с коэффициентом $1 + x$, где $x < \varepsilon$. Тогда зелёный отрезок Z растянется, его новыми концами будут точки $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ и $K + xK$ соответственно. Очевидно, можно подобрать $x < \varepsilon$ так, чтобы $K + Kx$ стало больше $t_{i_{n+1}}$ (ведь $K\varepsilon > S$), но при этом больше на величину, меньшую Sa_{n+1}. Тогда $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ будет меньше $t_{i_{n+1}}$, то есть точка $t_{i_{n+1}}$ попадёт на «растянутый» зелёный отрезок Z.

7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе

а) [10] ровно $2n$ жителей;

б) [4] ровно $2n - 1$ жителей. (*Г. Погудин*)

Решение. **а**) Пусть k – количество жителей в городе. Будем изображать ситуацию в игре таблицей с n строками и k столбцами; в i-й строке будут перечислены благосостояния $a_{i1}, ..., a_{ik}$ всех жителей i-го города в порядке неубывания. Пусть S_j – сумма чисел в j-м столбце.

Стратегия Рокфеллера. Если $S_j = S_{j+1}$, выбрать всех жителей из j-го столбца.

Предположим, что $S_j = S_{j+1}$; тогда $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при всех i. После марксова перераспределения числа $S_{j+1}, \ldots, S_k$ не уменьшатся. С другой стороны, у одного из выбранных жителей (пусть он в i-м городе) благосостояние станет больше чем a_{ij}. Это значит, что одна из сумм S_k при $k \geq j + 1$ увеличится (а именно та, в которую попало новое число). Поэтому последовательность $S_k, S_{k-1}, \ldots, S_1$ лексикографически увеличится. Это не может продолжаться бесконечно долго (ибо наборов из k чисел с фиксированной суммой конечное количество), так что в некоторый момент все числа $S_1, \ldots, S_k$ окажутся различными.

Пусть $S_1 \geq 1$. Тогда $S_i \geq i$ при всех i, откуда $nk = S_1 + \ldots + S_k \geq 1 + 2 + \ldots + k = ½\, k(k + 1)$, то есть $k \leq 2n - 1$. Противоречие.

Значит, $S_1 = 0$, и Рокфеллер победил..

б) Пусть $k = 2n - 1$. Применяя стратегию из пункта **а**), Рокфеллер либо выиграет, либо добьётся состояния $S_i = i$ при всех $i = 1, \ldots, k$. Покажем, как ему выиграть, начиная с такой позиции.

Скажем, что игра находится в i-*й ситуации* $(1 \leq i \leq n + 1)$, если (возможно, после перенумерации строк) выполнены следующие условия:

1) при $j = 1, 2, \ldots, i - 1$ в j-м столбце стоят j единиц в верхних клетках, а остальные числа – нули;

2) в i-м столбце нижние $n + 1 - i$ элементов – нули.

Покажем, что в рассматриваемый момент игра находится в i-й ситуации при некотором i. Переставим строки так, чтобы количества нулей в них не убывали сверху вниз. Пусть при некотором $i \leq n$ в i-м столбце не стоит i единиц; выберем наименьшее такое i. Тогда (из условия на нули в строках) в предыдущих столбцах единицы стоят «треугольником», а в i-м столбце есть $n + 1 - i$ нулей, то есть игра в i-й ситуации. Если же такого i нет, то в первых n столбцах единицы стоят «треугольником», и игра в $(n+1)$-й ситуации.

Покажем, что при $i > 1$, если игра в i-й ситуации, Рокфеллер может уменьшить номер ситуации одним ходом. Так он рано или поздно добьётся 1-й ситуации, то есть своего выигрыша.

Пусть наблюдается i-я ситуация. Тогда Рокфеллер может выбрать $(i–1)$-й столбец. Пусть j – наименьший индекс, при котором число в j-й строке уменьшится в результате действия Маркса. Тогда $j \leq i - 1$, и после этого хода будет наблюдаться j-я ситуация, что и требовалось.