СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
5	1.	В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, точка E — произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что $BE \geq 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.
6	2.	На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?
8	3.	Требуется записать число вида $77\ldots7$, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись — это просто 77. А существует ли число вида $77\ldots7$, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?
8	4.	Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?
8	5.	Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.
	6.	Докажите, что
7	а)	любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел.
3	б)	любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.
	7.	В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе — *сложным*. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что
5	а)	в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;
7	б)	в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 — 1. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

7 — 2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

3. Докажите, что

6 — а) любое число вида $3k-2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел.

2 — б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

8 — 4. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

8 — 5. Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше $30°$. Каково наибольшее возможное значение k?

9 — 6. На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной в $1°$ будет след хотя бы одной отмеченной точки.

7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе

10 — а) ровно $2n$ жителей;

4 — б) ровно $2n-1$ жителей.