6-7 классы **СЛОЖНЫЙ вариант** 17 марта 2019 *г.*

Предварительные решения

1. На доске написаны десять последовательных натуральных чисел. Когда стерли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2019. Какие числа остались на доске?

Ответ: 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 228, 229.

Решение. Ближайшее целое число, кратное 9, – это 2016. 2016 : 9 = 224. Поэтому несложно подобрать девять последовательных чисел, в сумме дающих 2016: 224, 224 – 1 и 224 + 1, 224 – 2 и 224 + 2, 224 – 3 и 224 + 3, 224 – 4 и 224 + 4, или расставляя по порядку: 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228. Осталось понять, какие числа нужно чуть-чуть увеличить (ровно на единицу), чтобы сумма стала равна 2019, отсюда получаем окончательный набор чисел: 220, 221, 222, 223, 224, 225, 227, 228, 229 (заодно поняли, что стерли число 226).

2. Число 2999 умножают на число, состоящее из 2019 единиц. Найдите сумму цифр произведения.

Ответ: 4065.

1-е решение. Будем умножать «наоборот»: число, состоящее из 2019 единиц на число 2999, и попробуем осуществить это умножение «столбиком»:

			1	1	1	…	1	1	1	1	1	1
×									2	9	9	9
			9	9	9	…	9	9	9	9	9	9
		9	9	9	9	…	9	9	9	9	9	
	9	9	9	9	9	…	9	9	9	9		
2	2	2	2	2	2	…	2	2	2			
3	3	3	2	2	2	…	2	2	1	8	8	9

Анализируя такую таблицу, видим, что всего цифр в произведении будет 2222, из которых по одной цифре 1 и 9, две цифры 8, три цифры 3, а оставшиеся 2015 цифр двойки. Тогда сумма всех цифр произведения равна: 2 × 2015 + 1 + 9 + 8 + 8 + 3 + 3 +3 = 4065.

2-е решение. Используем то, что 2999 = 3000 – 1. Значит, 11....11 × 2999 = 11....11×(3000 – 1) = 33...33000 – 11...11. Полученное число начинается на три тройки, потом идет 2015 двоек а потом 3000 – 1111=1889. Итого сумма цифр 3×3+2×2015+1+8+8+9=4065.

3. Дана доска 3×3. В двух ее нижних углах стоят два черных коня, а в двух верхних – два белых коня. За какое наименьшее количество ходов можно переставить эти фигуры местами таким образом, чтобы два белых коня оказались в двух нижних угловых клетках, а два черных – в двух верхних?

Ответ: 16.

Решение. Пронумеруем клетки доски следующим образом:

1	6	3
4	X	8
7	2	5

Изначально черные кони расположены в клетках с номерами 5 и 7, а белые – в клетках с номерами 1 и 3. За один ход шахматный конь может переместиться в клетку, номер которой на 1 отличается от номера клетки, в которой расположен конь (или из клетки №1 – в клетку №8, а также из клетки №8 – в клетку №1; клетка, отмеченная знаком X, в игре не участвует). Покажем, что для достижения цели каждый конь должен сделать не менее 4 ходов. Предположим, например, что белый конь с поля 1 сделал менее 4 ходов. Единственная возможность – за 2 хода дойти до клетки №7. Но тогда, очевидно, остальные кони вообще не могут занять необходимые места. Значит, каждый конь сделал минимум 4 хода, а всего необходимо сделать 16 ходов.

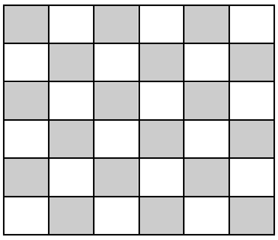
4. На каждой клетке доски $n×n$ сидит жук. По сигналу каждый жук переползает в клетку, имеющую общую вершину (но не имеющую общей стороны!) с клеткой, в которой жук сидел изначально. Какое наименьшее число клеток после такой операции может оказаться свободным, если

а) $n = 6$;

б) $n = 7$?.

Ответ: а) 0 клеток; б) 7 клеток.

Решение. а) Нарисуем доску $6 × 6$, и раскрасим ее клетки в шахматном порядке, см. первый рис.



Ясно, что жуки в черных клетках и в белых клетках будут в каком-то порядке меняться клетками. Разбив весь квадрат $6 × 6$ на 9 квадратиков $2 × 2$, легко понять, что жуки, сидящие в клетках черной диагонали каждого маленького квадратика, могут просто поменяться местами, также как жуки, сидящие в клетках белой диагонали, поменяться местами, и так в всех маленьких квадратиках.

б) Для пункта б) тоже сделаем шахматную раскраску доски и пронумеруем ее строки от 1 до 7 (см. второй рис.)

	1		5		2		1
1		9		5		2	2
	8		9		11		3
8		10		11		6	4
	10		12		6		5
4		7		12		3	6
	4		7		3		7

Будем отдельно рассматривать жуков, сидящих на черных клетках (назовем этих жуков черными) и на белых клетках (белые жуки).

Заметим, что черные жуки, сидящие в клетках строк с нечетными номерами, переползут в клетки сток с четными номерами и наоборот. Причем в нечетных строчках всего 16 клеток, а в четных – 9. То есть в клетки нечетных строк попадут не больше чем 9 жуков, а 7 останутся свободными. Саму смену жуков нарисовать несложно.

Белые жуки могут быть распределены на пары меняющихся клетками, один из вариантов представлен на рисунке (см. выше)..

5. Каждый сотрудник некоторой фирмы выписывает две газеты, а каждую газету выписывают пять сотрудников, причем никакие два сотрудника не выписывают две одинаковые газеты. Сколько человек может работать в такой фирме, если известно, что их не более двадцати?

Ответ: 15 или 20.

Решение. Если число сотрудников равно a, а число газет равно b, то из условия вытекает, что $2a = 5b$ и, в частности, число сотрудников кратно 5. Если число сотрудников равно 5, то газет всего 2; если сотрудников 10, то газет 4; и в том, и в другом случае какие-то два сотрудника будут выписывать одну и ту же пару газет, так как всевозможных пар газет меньше, чем сотрудников. Примеры для 15 и 20 сотрудников:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	+	+	+	+	+										
2	+					+	+	+	+						
3		+				+				+	+	+			
4			+				+			+			+	+	
5				+				+			+		+		+
6					+				+			+		+	+

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	+							+	+						+		+			
2	+	+								+						+		+		
3		+	+						+		+								+	
4			+	+						+		+								+
5				+	+						+		+				+			
6					+	+						+		+				+		
7						+	+						+		+				+	
8							+	+						+		+				+

6. Двое играют в следующую игру. Изначально дано число 2. Каждый игрок имеет право прибавить к имеющемуся числу любой его делитель, отличный от самого числа (возможно, единицу). Выигрывает тот, кто первым получит число, не меньшее 2019. Кто выиграет при правильной игре и как он должен играть?

Ответ: выигрывает первый игрок.

Решение. Первый игрок может применить, например, следующую стратегию: если на данном ходу он может получить число, не меньшее 2019, то он сразу выигрывает, а если не может, то он прибавляет к имеющемуся числу 1. Покажем, что такая стратегия дает ему возможность выиграть.

Действительно, легко видеть, что после каждого хода первого игрока полученное число будет нечетным, а после каждого хода второго игрока – четным. Пусть на каком-то ходу у первого игрока нет возможности выиграть. Если число в данный момент равно $2x$, то, значит, $3x < 2019$ и $2x < 1346$. После того, как первый игрок прибавит к имеющемуся числу 1, втором игроку достанется нечетное число, не превосходящее 1346. Так как к нечетному числу по правилам нельзя прибавит больше его трети, то и второй игрок своим следующим ходом не может выиграть. Поскольку второй игрок не может выиграть, выигрывает первый.

7. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Натуральное число называется редким, если самый большой из его собственных делителей равен произведению самого маленького собственного делителя на следующий по величине.

а) Найдите самое маленькое редкое число.

б) Сколько редких чисел оканчиваются цифрой 5?

в) Сколько редких нечетных чисел не превосходит 2019?

Ответ: а) 12, б) 8 чисел, в) 18 чисел.

Решение. Пусть p – наименьший собственный делитель, q – второй по величине собственный делитель. Тогда наибольший собственный делитель это pq. Произведение наибольшего и наименьшего собственного делителя это само число, значит само число равно p^2q. Значит p^2 также собственный делитель числа. Значит либо $q< p^2$, либо второй по величине собственный делитель это p^2 тогда само число это p^4.

а) Достаточно очевидно, что наименьшие возможные собственные делители – это p=2, q=3 и самое маленькое редкое число это 12.

б) Наименьший собственный делитель $p \neq 2$ потому что число нечетное. Если p=3, то q=5 чтобы число делилось на 5. Значит само число $p^2q = 45$. Если $p = 5$, то q – простое число меньше 25. Таких чисел всего шесть 7, 11, 13, 17, 19, 23 и значит редких чисел шесть: 175, 275, 325, 425, 475, 575. А также если второй по величине собственный делитель 25, то само число равно 625. Итого 8 редких чисел.

в) p=3, то q=5, 7, 9. Итого здесь три редких числа: 45, 63, 81.

p = 5 – пять чисел из пункта б

p = 7, q = 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 и не больше так как 2019/49 = 41,2. Значит, в этом случае 9 редких чисел: 539, 637, 833, 931, 1127, 1421, 1519, 1813, 2009.

p = 11, q = 13 и все так как 2019/121=16,7. Итого одно редкое число.

Больше редких чисел нет, так как $2019<13^3$.

Итого в этом пункте 3+5+9+1=18 редких чисел.