СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур

6-7 классы **базовый вариант** 3 марта 2019 *г.*

Предварительные решения

1. В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

Ответ: Да.

Решение. Пример: 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1.

2. Может ли число лет какого-то человека в 2019 году равняться сумме цифр года его рождения?

А) Найдете ли вы хоть один ответ в этой задаче?

Б) Найдете ли вы два ответа?

В) Найдете ли вы три ответа?

Ответ: А) Да, Б) Да, В) Нет. Примеры и обоснование см. в решении.

Решение. А) Сначала посмотрим, мог ли такой человек родится в XXI веке. Пусть год его рождения $\overline{20xy}$, где горизонтальная черта обозначает символическую запись четырехзначного числа, причем x и y – цифры, стоящие в разряде десятков и единиц соответственно. Тогда имеем: 2019 – $\overline{20xy}$ = 2 + x + y, или 19 – 10x – y = 2 + x + y, или 17 = 11x + 2y. Ясно, что x должно быть нечетным, т.е. подходит только 1. Отсюда получаем единственное решение x = 1, y = 3 для данного случая. Таким образом, год рождения 2013, а возраст в 2019 году – 6 лет.

Б) Аналогично для XX века: если год рождения $\overline{19xy}$, то точно так же как в пункте А) получим уравнение109 = 11x + 2y. Откуда (даже небольшим перебором) получаем еще один ответ: 1995 год рождения и возраст 24 года в 2019 году.

В) Больше ответов нет, что можно обосновать, например, следующим образом: сумма цифр любого года меньше 40, а возраст для XIX века или более раннего будет больше 100 лет.

3. По кругу лежат 2019 монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают 2018 переворотов монет: переворачивают какую-нибудь монету, затем одну монету пропускают и переворачивают следующую, затем две монеты пропускают и переворачивают следующую, затем три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают 2017 монет и переворачивают следующую. Верно ли, что последней будет перевернута монета, находящаяся рядом с первой перевернутой? (Ответ обоснуйте.)

Ответ: Да, это будет монета, находящаяся перед первой перевернутой, если смотреть по часовой стрелке.

Решение. Перенумеруем все монеты подряд по кругу от начальной (первой переворачиваемой) номерами от 1 до 2019. Заметим, что последовательные номера переворачиваемых монет можно посчитать так:

1) первая переворачиваемая монета имеет номер 1,
2) вторая – номер 1 + 2 = 3 (прибавляемая двойка соответствует одной пропущенной монете и самой второй переворачиваемой монеты),
3) третья – номер 1 + 2 + 3 = 6 (прибавляемая тройка здесь соответствует двум пропущенным монетам и самой третьей переворачиваемой монеты),

и так далее до

2019) 2018-й монеты, которая имела бы номер 1 + 2 + 3 + … + 2018, если бы мы нумеровали не по кругу, а так, будто они стоят в ряд.

Но по кругу стоят 2019 монет, значит, каждый раз переходя от 2019-й монеты к 1-й, нужно отнимать от суммы 2019. Указанная в последнем пункте сумма равна 2019×1009 (попробуйте посчитать ее сами). А значит, чтобы получить номер последней переворачиваемой монеты из этой суммы нужно 1008 раз отнять 2019 и останется 2019 – номер последней переворачиваемой монеты, которая естественно лежит перед первой переворачиваемой.

4. Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 7 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 3 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Решение. Назовем шкатулки, в которых лежит монета полными. Мысленно расположим шкатулки по кругу. Тогда можно заметить, что расстояние (в шкатулках) между полными шкатулками может принимать только три значения – 0, 1, 2. Все три расстояния могут быть реализованы в такой схеме «отрывания» шкатулок: 0) $*$, 1) $\bullet$, 2) $\bullet$, 3) $\varnothing$, 4) $\bullet$.

При этом знак $*$ соответствует шкатулке с номером 0, которую откроет помощник, и он откроет ее так, чтобы после открывания фокусником шкатулок с номерами 1, 2 и 4 (они отмечены жирной точкой), получилось:

- в случае рядом стоящих полных шкатулок эти шкатулки имеют номера 1 и 2 (т.е. помощник открывает шкатулку прямо перед 1-й полной),

- в случае полных шкатулок, стоящих через одну, они будут иметь номера 2 и 4, (т.е. помощник открывает шкатулку не прямо перед 1-й полной, а через одну от нее),

- в случае, стоящих через две, они будут иметь номера 1 и 4 (т.е. помощник вновь открывает шкатулку прямо перед 1-й полной).

5. В некотором классе учатся 22 ученика; некоторые из них дружат друг с другом. Известно, что если у двух учеников различное число друзей (в этом классе), то они дружат, а если одинаковое, то не дружат. Докажите, что можно выбрать в этом классе 7 учеников, никакие два из которых не дружат друг с другом.

Решение. Возьмем всех школьников, у каждого из которых есть ровно 1 друг в этом классе, и объединим их в *компанию*. Возьмем всех школьников, у каждого из которых есть ровно 2 друга в этом классе, и также объединим их в компанию. Продолжая действовать таким же образом, разобьем всех школьников на компании (в частности, может получиться компания из школьников, каждый из которых не имеет в классе ни одного друга). Заметим, что два школьника дружат, если принадлежат к разным компаниям, и не дружат, если принадлежат к одной компании. Достаточно показать, что в некоторой компании насчитывается хотя бы 7 школьников.

Заметим, что любые две различные (непустые) компании состоят из разного количества школьников. Действительно, если в двух разных компаниях насчитывается по x школьников, то каждый из этих $2x$ школьников имеет по $(21 - x)$ друзей; но тогда эти $2x$ школьников должны бы были принадлежать к одной компании, так как они имеют поровну друзей в этом классе. Значит, две разные компании состоят из различного количества школьников. Если бы не существовало компании, в которой имеется хотя бы 7 школьников, то количество школьников в классе не превосходило бы 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Значит, в некоторой компании хотя бы 7 школьников, что и требовалось доказать.

Примечание. Ситуация с 7 искомыми школьниками вполне реализуется, если компании состоят, например, из 1, 2, 3, 4, 5 и 7 школьников соответственно.

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур

8-9 классы	**базовый вариант**	3 марта 2019 *г.*

Предварительные решения

1. В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

Ответ: Да.

Решение. Пример: 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1 4 1 1.

2. По кругу лежат 2n+1 монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают 2n+1 переворотов монет: переворачивают какую-нибудь монету, затем одну монету пропускают и переворачивают следующую, затем две монеты пропускают и переворачивают следующую, затем три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают 2n монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

Решение (сравни решение задачи № 3 для 6-7 классов). Перенумеруем все монеты подряд по кругу от начальной (первой переворачиваемой) номерами от 1 до 2n+1. Заметим, что последовательные номера переворачиваемых монет можно посчитать так:

4) первая переворачиваемая монета имеет номер 1,
5) вторая – номер 1 + 2 = 3 (прибавляемая двойка соответствует одной пропущенной монете и самой второй переворачиваемой монеты),
6) третья – номер 1 + 2 + 3 = 6 (прибавляемая тройка здесь соответствует двум пропущенным монетам и самой третьей переворачиваемой монеты),

и так далее до

2n+1) (2n+1)-й монеты, которая имела бы номер 1 + 2 + 3 + … + 2n+1, если бы мы нумеровали не по кругу, а так, будто они стоят в ряд.

Но по кругу стоят 2n+1 монет, значит, каждый раз переходя от 2n+1-й монеты к 1-й, нужно отнимать от суммы 2n+1. Указанная в последнем пункте сумма равна (2n+1)×2n (попробуйте посчитать ее сами). А значит, чтобы получить номер последней переворачиваемой монеты из этой суммы нужно от этой суммы 2n-1 раз отнять 2n+1 и останется 2019 – номер последней переворачиваемой монеты, которая естественно лежит перед первой переворачиваемой.

Теперь важно понять следующую симметрию (своеобразную периодичность): 1-я переворачиваемая монета и (2n-1)-я – это одна и та же, 2-я и (2n-2)-я – одна и та же, и так далее, т.е. все кроме одной монеты перевернутся по крайней мере четное число раз. И только (n-1)-я – нечетное число раз.

3. Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что тогда m + n ≤ n^2.

Решение. Из условия имеем: $mn = k(m+n)$. Откуда следует, что $m = \dfrac{kn}{n-k}$, причем n > k. Но тогда: $m + n = \dfrac{kn}{n-k} + n = n\cdot(\dfrac{k}{n-k}+1) = n\cdot\dfrac{n}{n-k} \le n^2$.

4. В прямоугольник АВСД вписываются равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке ВС, а концы основания – на отрезках АВ и СД. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

Решение. Будем обозначать вписанные треугольники МКР, где М – вершина, лежащая на отрезке ВС, К – лежит на СД, Р – на АВ.

1) Для начала рассмотрим случай, когда $M = M_0$ – середина ВС, сам треугольник в этом случае обозначим $M_0K_0P_0$, а высоту треугольника M_0H, причем Н – середина основания, и по сути нам надо показать, что во всех остальных случаях расположения точки М на ВС все середины оснований описываемых треугольников совпадают с Н. Попутно заметим, что как легко видеть углы P_0M_0H и АВН равны $\alpha/2$. Обозначения точек M_0 и Н, веденные в этом пункте охраним и далее.
2) Пусть теперь М – произвольная точка на стороне ВС, а МКР – вписанный согласно условию треугольник. В отличие от первого случая обозначим середину основания РК через Х. Тогда МХ – высота, медиана и биссектриса треугольника МКР, причем точка Х лежит на прямой M_0H (по теореме Фалеса).

   Заметим далее, что четырехугольник РВМХ – вписанный в окружность (два противолежащих угла прямые). Поэтому углы РВХ и РМХ равны между собой и равны $\alpha/2$. Но от луча ВА в одну полуплоскость можно провести лишь один луч под углом $\alpha/2$, а значит, ВХ совпадает с ВН и точки Х и Н совпадают, что и требовалось доказать.

(предлагаем сделать рисунок самостоятельно!).

5. Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Решение. Назовем шкатулки, в которых лежит монета полными. Мысленно расположим шкатулки по кругу. Тогда можно заметить, что расстояние (в шкатулках) между полными шкатулками может принимать только шесть значений – 0, 1, 2, 3, 4, 5. Все эти расстояния могут быть реализованы в такой схеме «отрывания» шкатулок: 0) $*$, 1) $\bullet$, 2) $\bullet$, 3) $\varnothing$, 4) $\bullet$, 5) $\varnothing$, 6) $\varnothing$, 7) $\bullet$.

При этом знак $*$ соответствует шкатулке с номером 0, которую откроет помощник, и он откроет ее так, чтобы после открывания фокусником шкатулок с номерами 1, 2, 4 и 7 (они отмечены жирной точкой), получилось:

- в случае рядом стоящих полных шкатулок эти шкатулки имеют номера 1 и 2 (т.е. помощник открывает шкатулку прямо перед 1-й полной),
- в случае полных шкатулок, стоящих через одну, они будут иметь номера 2 и 4, (т.е. помощник открывает шкатулку не прямо перед 1-й полной, а через одну от нее),
- в случае, стоящих через две, они будут иметь номера 1 и 4 (т.е. помощник вновь открывает шкатулку прямо перед 1-й полной),
- и так далее (проверьте сами).