XL-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант

Младшие классы

1. [3] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

А. Шаповалов

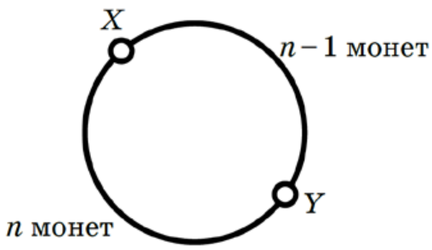
Ответ: могло.

Решение. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Можно доказать, что больше 11 чисел не могло быть выписано. См. также более общую задачу 5 старших классов.

2. [4] По кругу лежит $2n + 1$ монета орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворот: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

В. Расторгуев

Решение. Пусть $(n - 1)$-я перевёрнутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n - 1$ монет, а раз всего монет в круге $2n + 1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n + 1)$-й мы снова перевернём монету X.



И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n + 1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки $n - 2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n - 2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернём одну и ту же монету.

В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечётное число раз, а все остальные монеты – чётное.

3. [4] Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \le n^2$.

Б. Френкин

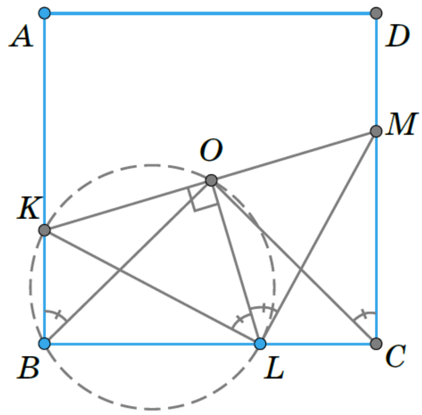
Решение 1. Поскольку $n^2 = n(m + n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m + n$. Значит, $n^2 \ge m + n$.

Решение 2. Пусть d = НОД(m, n), $m = ad$, $n = bd$. По условию, abd^2 делится на $d(a+b)$, откуда abd делится на $a+b$. Но так как числа a и b взаимно просты, каждое из них взаимно просто с $a+b$. Значит, d делится на $a+b$, откуда d^2 делится на $d(a+b) = m+n$ и, следовательно, $d^2 \ge m+n$. Осталось заметить, что $n^2 \ge d^2$.

4. [5] В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

И. Жижилкин

Решение. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок).



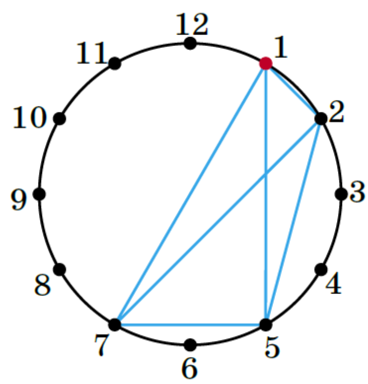
Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично получаем, что $\angle MCO = \angle MLO = \alpha/2$.

Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM.

5. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп

Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать ≪шаблон≫ – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он ≪накрыл≫ обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 12. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$ по модулю 12. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Существуют и другие шаблоны – например, четырёхугольник с вершинами 1, 2, 4, 8.

См. также задачу 4 старших классов, где шкатулок 13.

Старшие классы

1. [4] Расстояние от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трёх его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

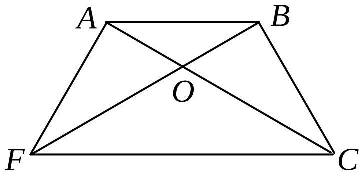
М. Евдокимов

Ответ: $\sqrt{3}$.

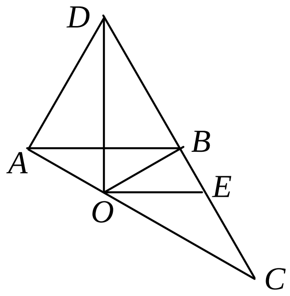
Пусть A, B, C – последовательные вершины шестиугольника, O – точка внутри него, и пусть $OA = OB = 1$, $OC = 2$.

Решение 1. Рассмотрим другую соседнюю с A вершину F. Тогда $FABC$ – равнобедренная трапеция (см. рисунок). Точка O лежит на общем серединном перпендикуляре её оснований FC

и AB, поэтому $OF = OC = 2$. Но $FC = 2AB$ (в правильном шестиугольнике главная диагональ в 2 раза больше стороны), откуда треугольники AOB и FOC подобны с коэффициентом 2. Поскольку AB и FC параллельны и $\angle BAO = \angle OCF$, точка, O лежит на диагонали AC (и, аналогично, на диагонали BF). Тогда $\angle OBC = 120° - 30° = 90°$, и $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC.



Решение 2. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB. Построим вне шестиугольника равносторонний треугольник ABD (рис. справа). Ясно, что тогда OD – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Кроме того, так как $DB : DC = 1 : 2 = OB : OC$, то OD – биссектриса внешнего угла O треугольника BOC. Значит, она перпендикулярна биссектрисе OE угла BOC. В силу равенства $\angle BAO = \angle ABO = \angle BOE = \angle EOC$, точки A, O, C лежат на одной прямой. В треугольнике ADC, $\angle D = 60°$, $DC = 2DA$, откуда угол DAC прямой, а $AB = AD = AC \operatorname{ctg} \angle D = 3 \operatorname{ctg} 60° = \sqrt{3}$.



2. [4] Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n. Обязательно ли тогда $a = b$?

Б. Френкин

Ответ: обязательно.

Решение 1. Пусть, например, $a > b$. Дробь $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ меньше a при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель), но стремится к a при $n \to \infty$ (в самом деле, поделив числитель и знаменатель на a^n и заметив, что $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, получим, что числитель дроби стремится к a, а знаменатель – к 1). Значит, $a - 1 < \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} < a$ при достаточно больших n и не может быть целым. Противоречие.

Решение 2. Пусть, например, $a > b$. Тогда $b < \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} < a$ при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель). Так как между b и a конечное число целых чисел, найдутся такие различные натуральные m и k, что $\dfrac{a^{m+1}+b^{m+1}}{a^m+b^m} = \dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{a^k+b^k}$. Умножив на знаменатели и приводя подобные, получим $a^m b^k(a - b) = a^k b^m(a - b)$. Сократив на $a - b$, имеем $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m-k} = 1$, откуда либо $a = b$, либо $m = k$ – противоречие.

Решение 3. Пусть наибольший общий делитель чисел a и b равен d, то есть $a=ud$, $b=vd$, где u и v взаимно просты. Из условия, сократив на d, получаем, что $d(u^{n+1} + v^{n+1})$ делится на $u^n + v^n$ для бесконечного множества натуральных n. Поскольку u и v взаимно просты, числа $u^{n+1} + v^{n+1}$ и $u^n + v^n$ взаимно просты с u и v, а кроме того, могут иметь общим множителем максимум $|v - u|$ (это следует из того, что $u^{n+1} + v^{n+1} - u(u^n + v^n) = v^n(v - u)$).

Но ненулевое число, не превосходящее $d\cdot|v - u|$, не может делиться на $u^n + v^n$ для бесконечно многих n. Значит, $u=v$, откуда $a=b$.

3. [4] Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырёхугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

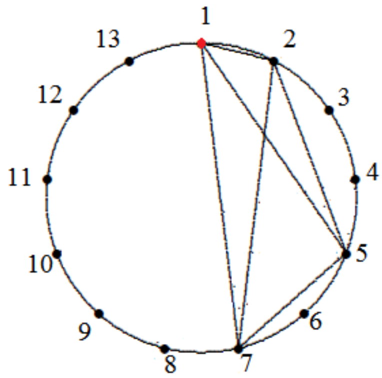
Н. Седракян

Решение. Признак вписанности четырёхугольника — равенство сумм противоположных углов, признак описанности — равенство сумм противоположных сторон. Если из центра вписанной в треугольник окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, он разобьется на три четырёхугольника, обладающих обоими этим свойствами. Чтобы разбить треугольник на 2019 таких четырёхугольников, достаточно разбить его на 2019:3 = 673 треугольника (например, отрезками, исходящими из одной вершины), а потом каждый из них — на три четырёхугольника, как показано выше.

4. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп

Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 13 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать ≪шаблон≫ – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он ≪накрыл≫ обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 13. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Для знатоков. Мы описали *конечную проективную плоскость над полем* $\mathbf{Z}_3$, где шкатулки выступают в роли точек, а шаблоны — в роли прямых. На этой плоскости как раз 13 точек и 13 прямых, причём на каждой прямой лежит по 4 точки.

5. [5] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

А. Шаповалов

Ответ: 1019 чисел.

Лемма. Сумма любых сорока подряд записанных чисел не меньше 80.

Доказательство. Пусть числа $a_1, \ldots, a_{40}$ записаны подряд. Среди чисел $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_{40} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{40}$ найдутся два b_i и b_j ($i < j$) с одинаковым остатком при делении на 40. Тогда сумма $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_j$ кратна 40, а значит, не меньше 80.

Решение. *Оценка*. Пусть выписано $n > 1019$ чисел. По лемме, сумма первых $1000 = 25\cdot 40$ из них не меньше $25\cdot 80 = 2000$. Сумма оставшихся чисел (их по крайней мере 20) не меньше 20. Значит, вся сумма не меньше 2020. Противоречие.

Пример. 25 групп 1, ..., 1, 41 (в каждой группе 39 единиц и число 41) и затем 19 единиц.