СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 17 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
5	1. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?
7	2. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
7	3. К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера – серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.
8	4. Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?
9	5. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?
9	6. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.
12	7. Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 17 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
5	1.	На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.
6	2.	На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
7	3.	К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга — серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.
8	4.	В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?
	5.	Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1.
4	а)	Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?
4	б)	А квадрат площади 1/2019?
8	6.	Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \le x_1 \le \ldots, \le x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?
12	7.	Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0; 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)