41-й Международный математический Турнир городов
2019/20 учебный год. Осенний тур.

Сложный вариант

Решения задач

Самые младшие классы - 6-7 классы

№1. Назовем *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые множители (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2).

а) Вычислите сложность числа 500. Определите, сколько чисел, идущих подряд за числом 500, имеют сложность не большую, чем сложность самого числа 500.

б) Ответьте на эти же вопросы для числа 512

Ответ: а) $C(500) = 5$. Три числа: 501, 502, 503.
б) $C(512) = 9$. Количество требуемых чисел: 511.

Решение.

а) Будем обозначать сложность числа n через $C(n)$. Тогда, так как $500 = 2 \cdot 250 = 4 \cdot 125 = 2^2 \cdot 5^3$, то сложность $C(500) = 5$.
Далее непосредственной проверкой убеждаемся:
$501 = 3 \cdot 167 \quad \Rightarrow \quad C(501) = 2$,
$C(502) = 2$,
$C(503) = 1$,
$C(504) = 6 \qquad$ (так как $504 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$).

б) Имеем: $C(512) = C(2^9) = 9$. $C(1024) = C(2^{10}) = 10$, а между этими числами, т.е. между 512 и 1024 все числа имеют сложность, не большую 9.

Действительно, минимальное число со сложностью, равной 10, – это число $2^{10} = 1024$, ибо для других чисел со сложностью 10, в разложении на простые делители будут присутствовать не только двойки.

Заметим, что в том же промежутке от 512 до 1024 найдется число со сложностью 9, а именно число $768 = 2^8 \cdot 3$, для которого $C(2^8 \cdot 3) = 9$.

№2. У Васи есть две «печати-тримино», или, другими словами, печати, черные красящие поверхности которых имеют вид двух тримино: полоски и уголка, состоящих из трех клеток.

а) Может ли Вася, используя только печать в виде полоски и приложив ее несколько раз к листу бумаги, получить клетчатый квадрат 8×8, все клетки которого, кроме одной угловой, черные? (*Накладывать один отпечаток на другой не разрешается*.)

б) Тот же вопрос для клетчатого квадрата 16×16 (вновь без одной угловой клетки).

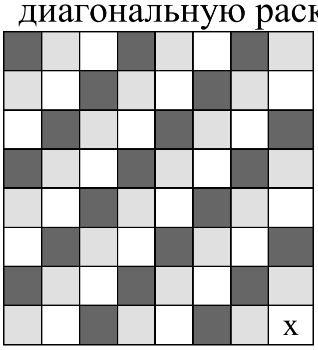
в) Тот же вопрос для клетчатого квадрата 16×16 без одной угловой клетки, но с использованием только печати в виде уголка?

Ответ: а) нет; б) да; в) да.

Решение:

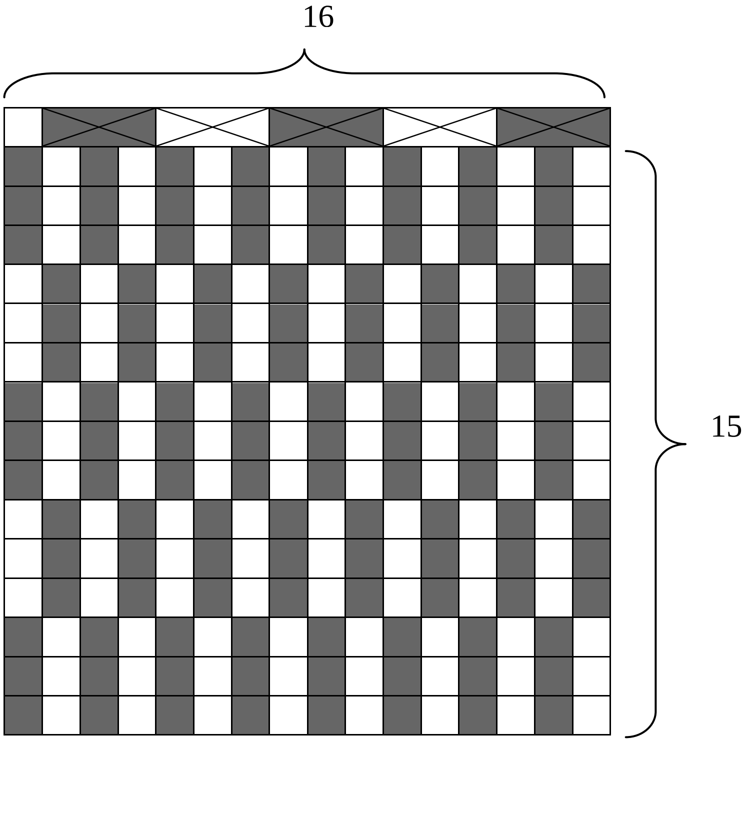
а) для обоснования ответа используем диагональную раскраску в три цвета: (на рисунке – белый, светло-серый и темно-серый). Допустим (от противного) нам удалось получить квадрат 8×8, все клетки которого, кроме одной угловой, черные. Знаком «х» на рисунке отмечена неокрашенная клетка.

Наложим теперь на «покрашенный» квадрат дополнительную диагональную раскраску, как показано на рисунке.

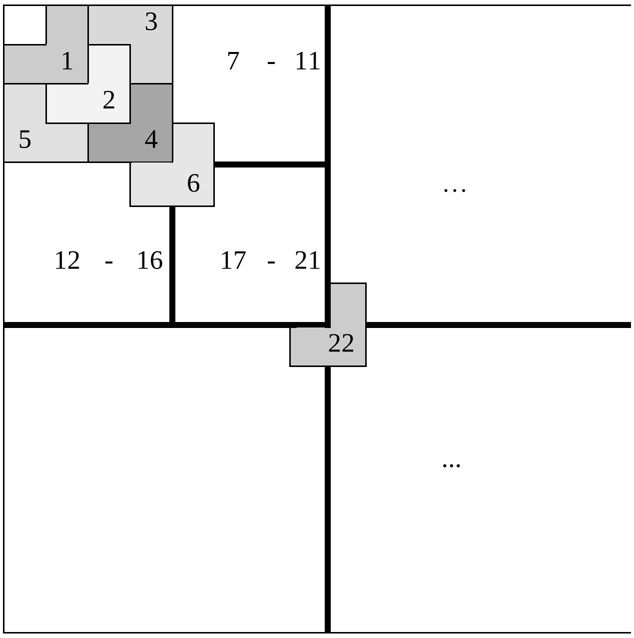


Получится: светло-серых клеток 22, белых и темно-серых – по 21, *причем неокрашенной черной печатью окажется одна из белых клеток* (именно одна из белых клеток при нашем наложении диагональной раскраски). Однако печать всегда «накрывает» по одной клетке каждого из этих трех цветов, т.е. по 21 клетки каждого цвета, следовательно, покрыть доску трехклеточными полосками без наложений нельзя.

б) Пример (для удобства трехклеточные отпечатки выделены по очереди серыми и белыми полосками):



в) Алгоритм расстановки печатей (см. описание ниже):



Сначала ставим первую печать в левом верхнем углу, как показано на рисунке. Затем и 2-ю, 3-ю, 4-ю и 5-ю (Примерный порядок показан на рис.). Таким образом, получили квадрат 4×4 без одной угловой клетки.

Затем ставим 6-ю печать, после чего можем рассмотреть три новых квадрата 4×4, каждый без одной угловой клетки, которые мы уже умеем закрасить: см. примерный порядок расстановки печатей с 7-й по 21-ю.

Затем ставим 22-ю печать (см. рис.) и осталось «закрасить» три квадрата теперь размером 8×8 без угловой клетки (один справа и два снизу), но их красить тоже уже умеем.

№3. Назовем пару (m, n) различных натуральных чисел m и n хорошей, если произведения mn и $(m+1)\cdot(n+1)$ – точные квадраты.

а) Найдется ли для числа $m = 2$ хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m, n) – хорошая?

б) Тот же вопрос для числа $m = 4$.

Ответ: а) (2, 242); б) (4, 38^2).

Решение.

а) Пусть $m = 2$. Тогда, исходя из условия, получаем систему:

$$\begin{cases} 2n = p^2 & \Rightarrow n = 2t^2, t > 1 \\ 3(n+1) = q^2 & \Rightarrow q = 3S, \end{cases}$$

т.е. $2t^2 + 1 = 3S^2$, откуда следует, что t не делится на 3.

Перебор: числа 2, 4, 5, 7, 8, 10 не подходят.

$$t = 11 \Rightarrow 243 = 3S^2; \qquad S^2 = 81, S = 9, \qquad n = 2 \cdot 11^2 = 242.$$

б) Для $m = 4$ аналогично

$$\begin{cases} 4n = p^2 & \Rightarrow n = t^2, t \geq 2, \\ 5(n+1) = q^2 & \Rightarrow q = 5S, \end{cases}$$

$$t^2 + 1 = 5S^2, \qquad t \equiv 2 \mod 5, \qquad t \equiv 3 \mod 5,$$

Перебор: 2, 3, 7, 80 12, 13, 17, 18, 22, 23, 27, 28, 32, 33, 37 не подходят.

$$t = 38, \quad 38^2 + 1 = 1445, \quad S^2 = 289, \quad S = 17, \quad n = 38^2 = 1444.$$

№ 4. У каждого ребенка в детском саду есть по три шарика. Шарики бывают двух цветов: красного и синего. Оказалось, что у 20 детей есть хотя бы по два красных шарика, у 30 детей есть хотя бы по два синих шарика и у 40 детей есть два шарика разных цветов. У скольких детей все три шарика одного цвета?

Ответ: 10.

Первое решение. Итак, есть три группы детей (вообще говоря, пересекающееся, т.е. некоторые дети могут входить в разные группы).

1-я группа: ровно 20 детей, у которых есть хотя бы по два красных шарика, причем какой третий шарик у каждого из них неясно, если у кого-то он будет, например, синий шарик, то такой ребенок попадет еще и в третью группу.

2-я группа: ровно 30 детей, у которых есть хотя бы по два синих шарика, и опять же, если у кого-то из них третий шарик красный, то такой ребенок будет входить еще и в третью группу.

3-я группа: ровно 40 детей, у каждого из которых точно есть по крайней мере по одному шарику каждого цвета. Причем теперь ясно, что часть из них входят в первую группу, а оставшиеся – во вторую, в зависимости от цвета третьего шарика (подчеркнем, что каждый из 40 входит либо в 1-ю, либо во 2-ю группу).

В итоге получим число детей, у которых все шарики одноцветные:

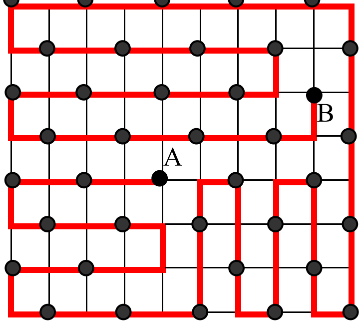
$$20 + 30 - 40 = 10.$$

Второе решение. Заметим, что если у кого-то есть ровно 1 красный шарик, то у него автоматически ровно два синих шарика, и наоборот. Обозначим число детей, у которых ровно 3 красных шарика через x, у которых ровно два синих – через y, у которых ровно один синий – через z, у которых ровно 3 синих – через u. Тогда по условию: $x + z = 20$, $y + u = 30$, $y + z = 40$. Складывая первых два равенства и вычитая третье, получим число детей, у которых все три шарика одного цвета: $x + u = 10$.

№5. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка А на плане) до своего отеля (точка В). Турист хочет посетить как можно больше перекрестков, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Какое наибольшее число перекрестков сможет посетить турист? (Перекрестки, совпадающие с точками А и В, а также на границе плана считаются.)

Ответ: 79.

Решение.



Всего перекрестков 80. Выделим часть перекрестков черными жирными точками в шахматном порядке (см. на рисунке точки, выделенные жирными точками как А и В). Каждый переход по улице от перекрестка до перекрестка происходит от выделенного перекрестка к невыделенному, либо наоборот. Если бы турист смог обойти все 80 перекрестков, то он прошел бы 79 улиц, но тогда один из двух перекрестков первый или последний был бы выделен, а второй – нет. А по условию и по нашему обозначению оба перекрестка А и В выделены. Так что более 78 улиц, и соответственно 79 перекрестков ему не пройти. Пример маршрута, охватывающего 79 перекрестков см. на рисунке.

№6. В Пещере Чудес находятся несколько корзин, во всех вместе лежат 2019 монет. Аладдин может сначала забрать себе несколько корзин с монетами, после чего вынуть несколько монет из оставшихся корзин. Аладдин сможет выйти из Пещеры Чудес, если будут выполнены условия: в Пещере Чудес останется как минимум 100 монет, и кроме того, во всех оставшихся корзинах монет будет поровну. Докажите, что Аладдин сможет покинуть Пещеру Чудес.

Решение (доказательство). Пусть в начале корзин n штук. Отсортируем корзины по убыванию монет: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

Если рассуждать от противного, Алладин не может покинуть пещеру чудес, то при каждом k $a_k \cdot k < 1\ 0$ (иначе можно было бы оставить k корзин по a_k монет). В частности, корзин менее 100. Кроме того, из этих неравенств при $k = 12...100$ получаем:

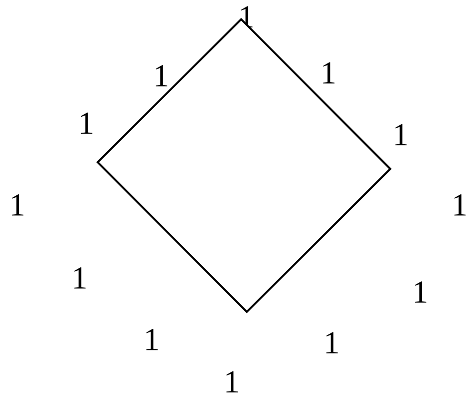
$a_1 \leq 99$; $a_2 \leq 49$; $a_3 \leq 33$; $a_4 \leq 24$; $a_5 \leq 19$; $a_6 \leq 16$; $a_7 \leq 14$; $a_8 \leq 12$; $a_9 \leq 11$; $a_{10} \leq 9$; $a_{11} \leq 9$; $a_{12} \leq 8$; $a_{13}, a_{14} \leq 7$; $a_{15}, a_{16} \leq 6$; $a_{17}, a_{18}, a_{19} \leq 5$; $a_{20},...,a_{24} \leq 4$; $a_{25},...,a_{33} \leq 3$; $a_{34},...,a_{49} \leq 2$; $a_{50},...,a_{99} \leq 1$.

Суммируя, получим, что общее число монет не превосходит:

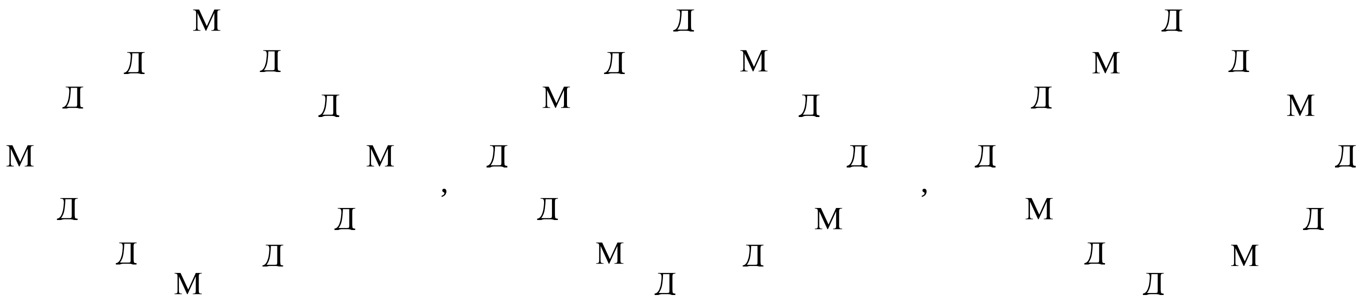
$$99+49+33+24+19+16+14+12+11+9+9+8+7+7+6+6+5\cdot 3+5\cdot 4+9\cdot 3+16\cdot 2+50=$$
$$=473<2019,$$ что противоречит условию.

№7. а) 12 мальчиков и девочек сидят по кругу. У каждого ребенка в руках табличка, на которой указано количество мальчиков среди следующих детей: самого ребенка, который держит табличку, и его соседей (например, мальчик, сидящий между двумя девочками, держит в руках табличку с числом 1, а девочка, сидящая между двумя мальчиками – табличку с числом 2). Можно ли по числам на табличках гарантированно определить, какие из детей – мальчики? **б)** Тот же вопрос для 20 детей.

Ответ: а) нет, б) да.
Решение. а) *Ответ: нет.*
Пусть числа на табличках такие:



Тогда возможны такие расположения мальчиков и девочек:



Заметим, что эти расположения отличаются друг от друга сдвигом на одну позицию по или против часовой стрелки. При этом во всех трех случаях на табличках будут стоять единицы, а вот расположения мальчиков и девочек уже другие (конечно, здесь имеется в виду не расположение детей относительно друг друга, а их расположение по отношению к местам, где они сидят).

б) *Ответ: можно*.

Для начала рассмотрим каких-то четырех подряд сидящих детей. Пусть 1-й и 4-й из них – мальчик (отмечено М) и девочка (Д) соответственно, 2-й и 3-й ребенок неважно какого пола (А и В), но важно, что написано на их табличках, см. таблицу, в которой под А и В написаны числа x и y соответственно.

Ребенок	М	А	В	Д
Число на табличке		x	y	

Из условия следует, что на табличках, которые держат дети А и В, числа отличаются на 1, а точнее: $x = y + 1$.

Если же вместо девочки на 4-м месте будет сидеть мальчик, и вообще, если на 1-м и 4-м местах сидят дети одно пола, то $x = y$.

Наоборот, если на 1-м месте сидит девочка, а на 4-м – мальчик, то $y = x + 1$:

Ребенок	Д	А	В	М
Число на табличке		x	y	

Таким, образом, зная пол одного ребенка по числам на табличках следующих двух детей можно определить пол ребенка, расположенного через два от первого (т.е. четвертого).

Но тогда по числам на табличках, начиная с какого-то одного ребенка, можно последовательно определить пол всех 20 детей по следующей схеме (для определенности все дети перенумерованы подряд по кругу от 1 до 20, причем за 20-м снова идет 1-й и так далее):

$$1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 16 \to 19 \to 22 = 2 \to 5 \to 8 \to 11 \to 14 \to 17 \to 20 \to$$
$$\to 3 \to 6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18. \qquad \textbf{(*)}$$

Как видим, здесь перечислены все номера от 1 до 20.

Осталось заметить, что пол одного ребенка по заданным табличкам в случае 20 детей всегда можно определить. Разберем возможные случаи.

1) Если есть хотя бы одна табличка с числом 3, то отсюда делаем вывод, что эту табличку держит мальчик и рядом с ним слева и справа еще два мальчика.
2) Если есть хотя бы одна табличка с числом 0, то наоборот, эту табличку держит девочка и рядом с ней еще две девочки.
3) Если есть таблички с разными значениями, то есть и две соседние таблички, со значениями, отличающимися на 1, и тогда по рассмотренному выше, делаем вывод, что «рядом с большей табличкой» точно сидит мальчик (с другой стороны от «меньшей таблички»).
4) Случаи, когда на всех табличках стоят 1 или на всех табличках стоят 2 невозможен, ибо в таких случаях проходя по цепочке **(*)** мы получим противоречие (*проверьте это самостоятельно*).

Легко проверить, что эта схема не работает для п. а), т.е. для 12 детей.