41-й Международный математический Турнир городов
2019/20 учебный год. Осенний тур. Базовый вариант. Решения задач

8-9 классы

1. [4] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

Алексей Воропаев

Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

Стратегия 1. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

Стратегия 2. Пусть зритель всегда угадывает номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

2. [4] Дана окружность ω с центром O и две её различные точки A и C. Для любой другой точки P на ω отметим середины X и Y отрезков AP и CP и построим точку H пересечения высот треугольника OXY. Докажите, что положение точки H не зависит от выбора точки P.

Артемий Соколов

Решение. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая YH содержит среднюю линию треугольника APC. Аналогично, прямая XH содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке H – середине стороны AC.

3. [4] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Егор Бакаев

Ответ. За 50 рублей.

Решение. *Оценка*. Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

Пример. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: *abcdabcd…d*. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах *bc* и *da* – это 49 платных операций. В клетках цвета *b* и *c* фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета *a* и *d* сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

Замечание. Сравните с задачей 5 старших классов.

4. [5] Даны целые числа $a_1, ..., a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, ..., a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на 41^2. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, ..., a_{1000}$ делится на 41?

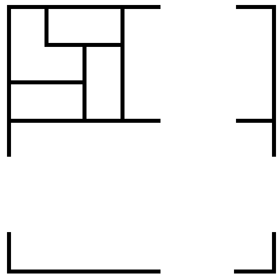
Борис Френкин

Ответ: верно. **Решение**. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, то есть за 41 следует 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом n. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на 41^2 один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на 41^2, поэтому a_k^2 делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и a_k делится на 41.

5. [5] У Васи есть неограниченный запас брусков 1×1×3 и уголков из трёх кубиков 1×1×1. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где m, n и k – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

Михаил Евдокимов

Решение. Так как mnk делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота k. Достаточно заполнить коробку $m\times n\times 3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* 1×2×3. Если mn чётно, то основание коробки можно разбить на доминошки 2×1 и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьём основание коробки на квадрат 3×3 и два прямоугольника (возможно пустых), см. рис. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.



10-11 классы

1. [3] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

Алексей Воропаев

Ответ: при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф T сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

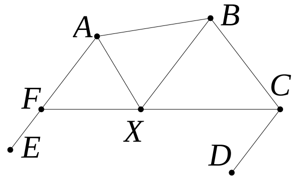
Стратегия 1. Зритель всегда называет номер положения T. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

Стратегия 2. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

2. [4] Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AE \parallel CD$ и $AB = BC$. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке K. Докажите, что $BK \parallel AE$.

Егор Бакаев

Решение. Пусть биссектриса угла C пересекает прямую AE в точке F, а прямая, проходящая через B параллельно AE , персекает отрезок CF в точке X. Тогда $\angle BXC = \angle DCX = \angle BCX$. Отсюда $BX = BC = BA$. Значит, $\angle BAX = \angle BXA = \angle FAX$. Следовательно, AX – биссектриса угла A, поэтому X совпадает с K и $BK \parallel AE$.



Замечание. На рисунке точка F лежит на стороне AE, но в решении это нигде не используется. Можно, впрочем, доказать, что биссектриса угла C не может пересекать сторону AB (а сторону ED – может).

3. [4] Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[^x/_2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.

Владислав Новиков

Решение. Индукция. Число 1 написано. Покажем, как получить натуральное $n > 1$, если умеем получать все меньшие числа. Число n представимо в одном из трёх видов: $3k - 1$, $3k$ или $3k + 1$, где k – натуральное. 1) $2k - 1 \to 6k - 2 \to 3k - 1$; 2) $2k \to 6k + 1 \to 3k$; 3) $k \to 3k + 1$.

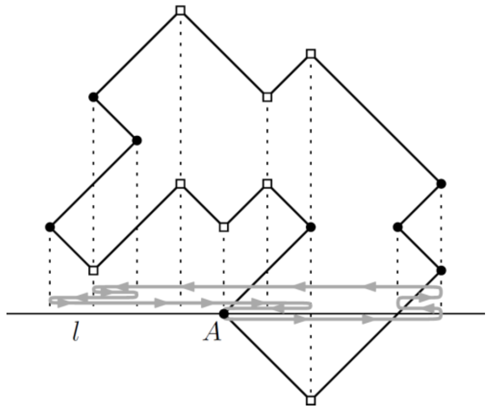
4. [5] Дан многоугольник, у которого каждые две соседние стороны перпендикулярны. Назовём две его вершины *не дружными*, если биссектрисы многоугольника, выходящие из этих вершин, перпендикулярны. Докажите, что для любой вершины количество не дружных с ней вершин чётно.

Михаил Скопенков

Решение 1. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Пусть вертикальных сторон k, тогда горизонтальных сторон тоже k. Все вершины многоугольника делятся на 4 типа: ┌ , ┐, └ , ┘. Пусть вершина A имеет тип 2 (без ограничения общности). Тогда не дружные с ней – вершины типа 1 и 4.

Рассмотрим любую горизонтальную сторону. Её левый конец может быть только типа 1 или 3. Всего левых вершин у горизонтальных сторон столько же, сколько левых сторон, то есть k, откуда суммарное число вершин типа 1 и 3 равно k. Пусть вершин типа 1 всего x, тогда вершин типа 3 всего $k - x$. Рассматривая нижние концы вертикальных сторон, получаем аналогично, что вершин типа 3 и 4 всего k, откуда вершин типа 4 всего $k - (k - x)$, то есть x. Но тогда вершин типа 1 и 4 всего $2x$ (чётное число), а это и есть вершины, которые не дружны с A.

Решение 2. Расположим многоугольник так, чтобы биссектриса l данной вершины A была горизонтальна. Пусть некая точка движется по периметру многоугольника с постоянной скоростью, начав и закончив в вершине A. Тогда её проекция на l также движется с постоянной скоростью, причём проекция меняет направление движения ровно в те моменты, когда точка проходит через вершину, дружную с A, или через саму A. Учитывая, что всего вершин чётное число, получаем требуемое.



Решение 3. Расположим многоугольник так, чтобы его стороны были горизонтальны и вертикальны. Поскольку они чередуются, число вершин чётно (пусть их $2n$). При этом угловой коэффициент биссектрисы равен 1 или –1.

Занумеруем вершины против часовой стрелки числами от 1 до $2n$ и поставим в i-й вершине число a_i, равное 1, если угол в ней равен 90°, и –1, если угол в ней равен 270°. Обходя многоугольник по контуру против часовой стрелки, в каждом угле в 90° мы поворачиваем на 90° против часовой стрелки, а в каждом угле в 270° – на 90° по часовой. Вернувшись в исходное положение после полного обхода, мы повернулись в итоге на 360° против часовой стрелки, откуда количество углов в 270° на 4 меньше, чем в 90°, то есть равно $(2n - 4)/2 = n - 2$, поэтому $a_1a_2...a_{2n} = (-1)^{n-2}$.

Заметим, что направления биссектрис в соседних вершинах совпадают тогда и только тогда, когда углы в них разные. Можно считать, что угловой коэффициент биссектрисы в первой вершине равен a_1. Тогда для каждого i знак b_i углового коэффициента биссектрисы в i-й вершине совпадает с a_i, если i нечётно, и совпадает с $-a_i$, если i чётно. Поэтому $b_1b_2...b_{2n} = a_1a_2...a_{2n}(-1)^n = (-1)^{2n-2} = 1$. Следовательно, число «отрицательных» (а потому и «положительных») биссектрис чётно.

5. [5] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно 4 фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Егор Бакаев

Ответ. За 61 рубль. **Решение**. Занумеруем фишки и клетки по порядку от 0 до 99. Бесплатная операция не меняет остаток номера клетки при делении на 5.

Оценка. Расположим кучки фишек по кругу. Сначала кучка фишек с остатком 0, потом – с 1, и так далее до 4. Платная операция переставляет пару фишек из соседних кучек. Фишки из нулевой кучки должны участвовать хотя бы в одной такой замене, чтобы добраться до четвёртой кучки. Аналогично для фишек из четвёртой кучки. Фишки из первой кучки должны участвовать хотя бы в двух заменах, чтобы добраться до третьей кучки. Аналогично для третьей кучки. Значит, потребуется хотя бы $(20 + 20 + 40 + 40):2 = 60$ рублей. Но если будет потрачено только 60 рублей, то фишкам из первой кучки придётся идти через вторую кучку, поэтому хотя бы одна фишка из второй кучки будет участвовать в заменах. Следовательно, необходимо больше 60 рублей.

Алгоритм. Ясно, что бесплатными операциями можно расставить фишки внутри кучки в любом порядке. Поэтому правильно расставить все фишки из нулевой и четвёртой кучек можно за 20 рублей. Рассмотрим оставшиеся три кучки. Мысленно оставим только одну фишку A во второй кучке. Поменяем её с фишкой из первой кучки. Каждый раз будем передвигать дальше фишку, пришедшую во вторую кучку, за счёт новой фишки. Тогда за 40 рублей мы перетащим все фишки из первой кучки в третью, а из третьей – в первую кроме одной: она останется во второй кучке, не дойдя до первой. Поменяем ее с A, и все фишки окажутся в нужных кучках.

Замечание. Сравните с задачей 3 младших классов.