СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур,
10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geqslant 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень?

5 2. Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC.

6 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

10 4. Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k — наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, …, либо с некоторого момента постоянна.

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна $MA \cdot MC + MB \cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

6 а) вписанный;

6 б) описанный.

6. Куб, состоящий из $(2N)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2N$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

6 а) Докажите, что можно выбрать такие $2N^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

6 б) Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

12 7. Некоторые из чисел 1, 2, 3, …, n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b-c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше, чем $\varphi(n)$ (количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n).