СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Назовём *сложностью* целого числа $n > 1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких n все числа между n и $2n$ имеют сложность

2 а) не больше, чем у n;

2 б) меньше, чем у n?

7 2. Два остроугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки B_1 и C_1 лежат на стороне BC, а точка A_1 лежит внутри треугольника ABC. Пусть S и S_1 — соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB+AC} > \frac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}\,.$$

7 3. Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные — по 2 грамма, медные — по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более, чем за 101 взвешивание?

7 4. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

8 5. Назовём пару (m, n) различных натуральных чисел m и n *хорошей*, если mn и $(m+1)(n+1)$ — точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального m существует хотя бы одно такое $n > m$, что пара (m, n) хорошая.

8 6. У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало — сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

10 7. В клетчатом деревянном квадрате 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя квадрат как печать, 100 раз приложил его к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат 101×101, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?