Решения задач 41 Турнир Городов Весенний тур БАЗОВЫЙ вариант

6-7 классы

1. Ответ: может. ***Решение***. Сразу заметим, что минимальное количество королевств, которое может претендовать на спорную территорию – это 0, если по соседству с ней нет ни одного королевства, а максимальное количество – 8, когда во всех соседних клетках и по вершине и по стороне находится королевство. Тогда для того, чтобы на любые две спорные территории претендовало разное количество королевств, необходимо, чтобы на одну спорную территорию претендовало 0 королевств, на другую – 1 королевство, на третью – 2 и т.д. на девятую – 8 королевств. Остается построить пример.

0	1	*	*	*	*
2	3	5	*	8	*
*	*	6	*	*	*
*	*	*	*	*	*
4	7	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

В данном примере клетки с крестиками обозначают королевства, а клетки с числами – спорные территории. Число, записанное в клетке спорной территории, – количество королевств, претендующих на данную спорную территорию.

2. Ответ: 22. ***Решение***. Пусть в ряд записаны числа a_1, a_2, a_3, ... Если $a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+10} = 100$, то сумма $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+11} = 101$ (в противном случае, $a_k = a_{k+11}$, чего не может быть по условию задачи), откуда $a_{k+11} = a_k + 1$. Аналогично, если $a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+10} = 101$, то сумма $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+11} = 100$, откуда $a_{k+11} = a_k - 1$.

Пусть $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 100$, тогда по доказанному выше $a_2 + a_3 + ... + a_{12} = 101$ и $a_{12} = a_1 + 1$, далее $a_3 + a_4 + ... + a_{13} = 100$ и $a_{13} = a_2 - 1$, далее $a_{14} = a_3 + 1$. Причем при построении примера нужно следить, чтобы a_{12}, a_{13} и a_{14}, не совпадали со всеми предыдущими. Этого можно добиться, поставив в начале последовательности самое большое число, третьим по счету чуть поменьше, но хотя бы на 2 меньше первого; а число a_2 взять самым маленьким. Вот один из возможных примеров: 16, 3, 13, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 2, 14.

Примечание. Эту последовательность можно даже продолжить с соблюдением условия задачи числом 4. Предлагаем школьникам самостоятельно построить самую длинную последовательность такого рода.

3. Ответ: а) 0; б) 0. ***Решение***. **а)** В этом пункте можно либо непосредственно посчитать сумму (2+6+12+20+30+42+56+72+90 = 330), либо посчитать по остаткам от деления на 10 (другими словами, по последним цифрам числа). **б)** Всю сумму стоит разбить на суммы по 9 слагаемых, аналогичных пункту а), и равных числу, заканчивающемуся на 0, а между ними оставить ровно одно произведение, тоже заканчивающееся на ноль. Ниже приведен пример: $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + 9\cdot10$; затем $10\cdot11$, затем $11\cdot12 + 12\cdot13 + 13\cdot14 + \ldots + 19\cdot20$; затем $20\cdot21$, и т.д.

4. Ответ: неправильно. ***Решение***. Заметим, что Незнайка складывает число, состоящее из некоторых цифр a_1, a_2, a_3, ..., и другое число, состоящее из тех же цифр, но в каком-то другом порядке. Получается, что с одной стороны, общая сумма цифр обоих чисел четная (каждая цифра повторяется дважды). В то же время сумма цифр стоящих в этих числах в разряде единиц равна 11 (помним, что нулей нет!), а во всех других разрядах сумма цифр равна 10, т.е., с другой стороны, сумма всех цифр – нечетная. Противоречие.

5. Ответ: выигрывает второй игрок, т.е. Вася. ***Решение***. Для начала заметим, что фишкой g7 ходить на самом деле нельзя, ибо на любой ход этой фишкой другой игрок сразу поставит ее на клетку h8. Таким образом, ее можно считать неподвижной и ее наличие разве что может мешать каким-то стратегиям игроков.

Однако, и в этом случае способ нахождения выигрышных-проигрышных позиций помогает решить задачу. На рисунке указаны все позиции. Знаком «+» обозначены выигрышные позиции, т.е. такие, из которых всегда есть ход в проигрышную (которые обозначены знаком «–»), а проигрышные – это такие позиции, из которых любой ход ведет в выигрышную. В частности, поле h8 – проигрышное (в наших обозначениях это означает: если игрок получает ход с фишкой в этой позиции – он уже проиграл).

+	+	+	+	+	+	+	–
+	+	+	+	+	–	о	+
+	+	+	+	+	+	–	+
+	+	+	+	–	+	+	+
+	+	+	–	+	+	+	+
+	+	–	+	+	+	+	+
+	–	+	+	+	+	+	+
–	+	+	+	+	+	+	+

Про поле g7 мы уже сказали, но и поле a1 – стартовое – тоже проигрышное.