Решения задач 41 Турнир Городов **Весенний тур**

СЛОЖНЫЙ вариант **6-7 классы**

1. В некотором месяце суббот меньше, чем воскресений, а вторников меньше, чем понедельников. Каким днем недели начинается и заканчивается данный месяц?

Ответ: первый день месяца – воскресенье, а последний – понедельник**.**

Решение. Заметим, что по четыре раза каждый день недели встречается в любом случае, так как в любом месяце есть по крайней мере 28 дней. Значит, «воскресений» и «понедельников» должно быть по 5, и пятые «воскресенье и понедельник» это соответственно 29 и 30 дни месяца. В то же время при заданных условиях 31 день в описываемом месяце быть не может, так как вторников и суббот меньше, чем понедельников и воскресений. Значит, первый день месяца – воскресенье, а последний – понедельник.

2. У Бори в тетради записано число 2020, а у Лёни – число 250. За один ход Боря прибавляет к своему числу произвольное натуральное число, а Лёня умножает свое число на то же самое число (которое прибавляет Боря). Могут ли мальчишки уравнять свои числа, сделав не более 250 ходов?

Ответ*: могут***.**

Решение. Вот один из вариантов: сначала Боря прибавляет к своему числу 9 (и получает 2029), а Леня умножает свое число на 9 (и получает 2250). Затем 221 раз каждый из них использует 1, при этом Боря как раз получает число 2250, а у Лени число 2250 при умножении на 1 не изменяется. Всего потребовалось 222 хода.

3. В однокруговом волейбольном турнире приняло участие 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно по одному матчу до двух побед в партиях (сетах). Как известно, ничьих в волейболе не бывает, а любая команда за каждую выигранную партию получает одно очко (т.е. если результат матча 2:0, то команда-победитель получает 2 очка, а проигравшая команда получает 0 очков; если же результат 2:1, то победитель получает 2 очка, а проигравшая команда получает 1 очко).

а) Могли ли три победителя турнира в сумме набрать очков больше, чем все оставшиеся команды вместе? (Ответ обоснуйте.)

б) А могло ли случиться наоборот: три победителя турнира в сумме набрали очков меньше, чем все оставшиеся команды вместе?

3. в) Пусть в турнире участвуют n команд. При каком наибольшем числе n три победителя могли в сумме набрать очков больше, чем все оставшиеся команды вместе?

Ответ: а) да; б) да; в) n = 11.

Решение. а) Три победителя сыграли между собой три матча и максимальное число очков, которое они могли набрать в этих встречах, равно 9 (если все встречи закончились с одинаковым счетом 2:1). С оставшимися 7 командами три победителя сыграли 21 матч, в котором могли набрать 42 очка (если во всех таких встречах они победили). Итого: максимальное суммарное число очков трех победителей равно 51. В то же время 7 оставшихся команд сыграли между собой 21 матч (7×6:2), в которых могли набрать 42 очка (если все встречи закончились со счетом 2:0) и они не набрать ни одного очка во встречах с тремя победителями. Как видим 51 > 42.

б) В то же время, если последние семь команд в отличие от описанной в пункте а) ситуации все свои матчи сыграли со счетом 2:1, то уже ни набрали бы 63 очка, что больше, чем 51.

в) Воспользуемся принципом крайнего. Как и в пункте а), в случае n команд три победителя максимально могли набрать $9 + 3\times(n-3)\times2 = 6n-9$ очков, а оставшиеся $n-3$ команды минимально могли набрать $(n-3)\cdot(n-4):2)\times2) = n^2-7n+12$ очков. Оценим, при каком наибольшем n возможно выполнение неравенства $6n-9 > n^2 - 7n+12$, которое равносильно неравенству

$$n^2-13n+21 = n(n-13)+21 < 0.$$

Очевидно, что при $n = 13$ или n большем 13, значение выражения в левой части неравенства больше 0, при $n = 12$ тоже больше нуля, и лишь при $n = 11$ меньше 0.

4. В классе 20 человек. На контрольной по математике выяснилось, что линейки есть не у всех (и ни у кого не было двух или более линеек). Поэтому, время от времени один из учеников с линейкой отдавал линейку какому-нибудь ученику без линейки. В конце урока 10 учеников заявили, что каждый из них отдавал линейку чаще, чем получал. Сколько линеек имелось на контрольной?

Ответ: 10.

Решение. Заметим, что все 10 учеников, которые сделали заявление, имели линейки в начале урока. Доказать можно так: в начале у каждого ученика было либо 0 линеек, либо 1 линейка; пусть +1 означает, что ученик взял линейку, а (–1) означает, что ученик отдал линейку. При этом операции у каждого ученика чередуются, а общая сумма +1 и –1 по всем операциям равна 0 (ведь в каждой операции участвуют двое: один отдает линейку, а второй берет).

Так как 10 человек отдавали линейки чаще, чем брали, то их начальная позиция 1, а последняя – 0 (т.е. вначале у этих 10 человек вначале урока были линейки, а в конце их не было). Сумма ±1 у этих 10 учеников равна –10, но тогда у оставшихся 10 учеников сумма ±1 равна +10, т.е. как минимум у 10 человек были линейки, и у 10 их не было. Таким образом линеек было ровно10.

.

5. Конь-хамелеон ходит по клетчатой доске как обычный конь (буквой «Г»). Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в ее цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого коня-хамелеона поставили в одну из клеток чёрной доски 8×8. Сможет ли он раскрасить ее в шахматном порядке?

Ответ: нет, не сможет.

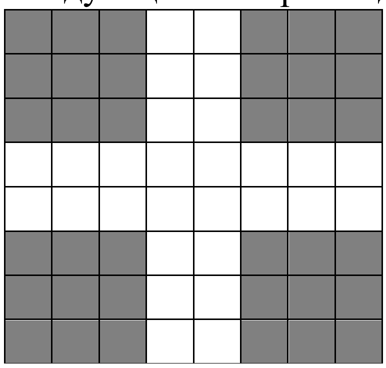
Решение. Решение. Рассмотрим ход, на котором конь окрашивает последнюю клетку. Предположим, что на последнем ходу конь перекрасил белую клетку в черный цвет. Поскольку в результате получилась шахматная раскраска, то перед последним ходом конь находился на белой клетке. Но это означает, что он сам был белым, т. к. после хода цвет коня совпадает с цветом поля, на котором он стоит. В таком случае он не мог последним ходом перекрасить белую клетку в черный цвет.

6. а) Дан квадрат 8×8, из него вырезаны три квадрата 3×3. Докажите, что из него можно вырезать по крайней мере еще один квадрат 3×3;

б) Дан квадрат 28×28, из него вырезано k квадратов 3×3. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно вырезать из исходного квадрата по крайней мере еще один квадрат 3×3?

Ответ: б) k = 35.

Решение. А) Рассмотрим следующие четыре квадрата 3×3:



Любой квадрат 3×3 имеет общую клетку ровно с одним из выделенных квадратов. Следовательно, один из выделенных квадратов не имеет ни одной общей клетки ни с одним из вырезанных квадратов, и его можно вырезать из таблицы.

Б) Покажем, что k = 35. Рассмотрим раскраску квадрата 28×28, аналогичную раскраске, показанной на рисунке выше. В такой раскраске будет 36 выделенных квадратов 3×3. Любой квадрат 3×3 имеет общую клетку ровно с одним из выделенных квадратов. Таким образом, если вырезать 35 квадратов 3×3, то найдется выделенный квадрат, в котором не вырезана ни одна клетка, и следовательно, можно вырезать еще один (выделенный) квадрат. Обратно, если вырезать 36 выделенных квадратов, то больше нельзя будет вырезать ни одного квадрата.

7. Можно ли отметить на плоскости:

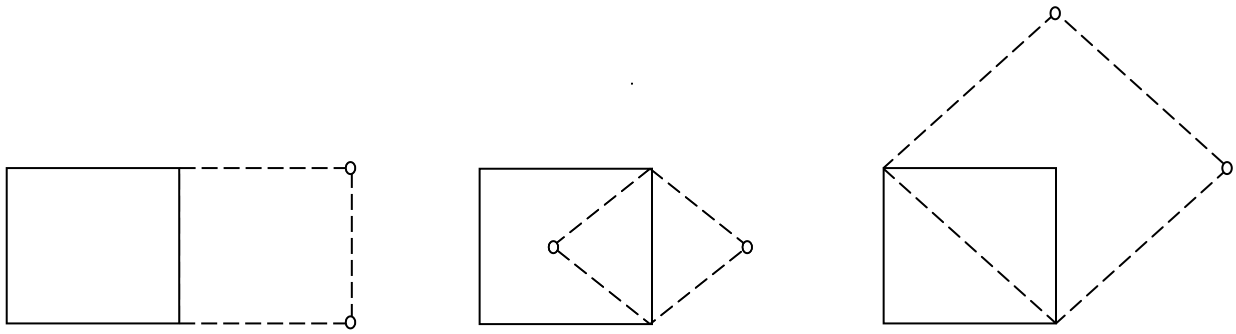
а) 7 точек так, чтобы нашлись три квадрата, все вершины которых совпадали бы с отмеченными точками?

б) 6 точек так, чтобы нашлись три квадрата, все вершины которых совпадали бы с отмеченными точками?

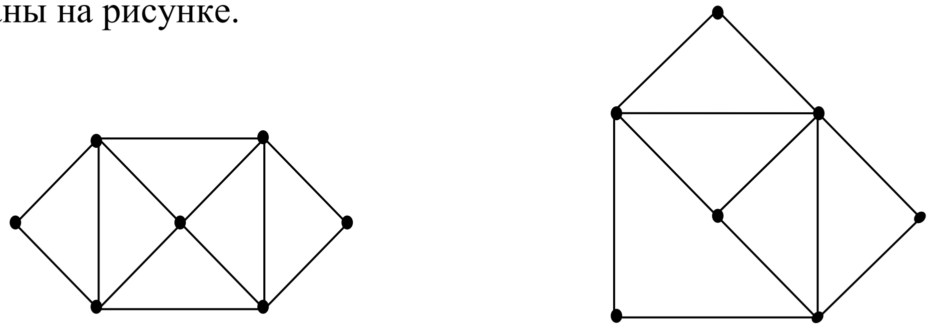
в) 8 точек так, чтобы нашлись четыре квадрата, все вершины которых совпадали бы с отмеченными точками?

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

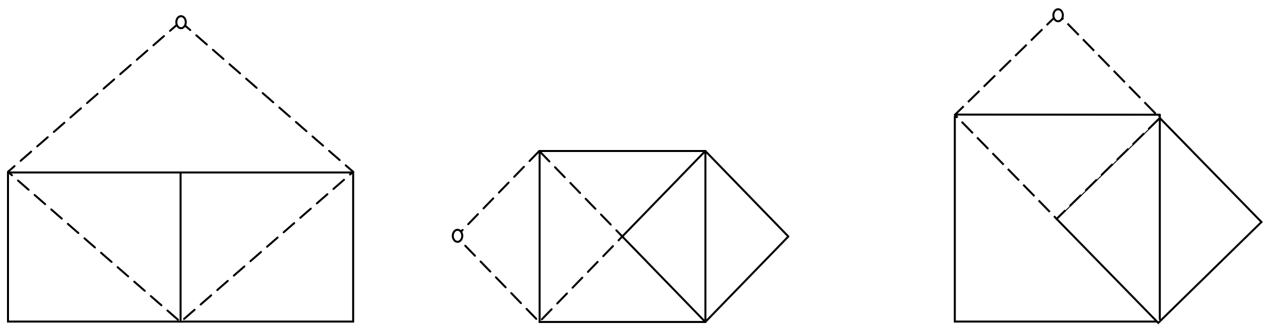
Решение. **а) и б)** Заметим, что два квадрата не могут иметь ровно три общие вершины, так как иначе у них совпадут и четвертые вершины. Далее, два квадрата могут иметь ровно две общие вершины только в случаях, изображенных на рисунке.



Легко убедиться, что в каждом из них не найдется трех квадратов с вершинами в отмеченных точках. Следовательно, отметить 6 точек, удовлетворяя условию задачи, нельзя. Наконец, если у каких-либо двух квадратов совпадает только одна вершина, то на плоскости отмечено не менее 7 точек. Два способа отметить на плоскости 7 точек так, чтобы нашлось три квадрата с вершинами в этих точках, показаны на рисунке.



в) Покажем (хоть этого и не требуется в условии), что нельзя отметить на плоскости 7 точек так, чтобы нашлось четыре квадрата с вершинами в этих точках. Предположим противное. Тогда среди квадратов с вершинами в этих точках найдутся два имеющих ровно две общие вершины: трех общих вершин у разных квадратов быть не может, а если у любой пары квадратов не более одной общей вершины, то отмечено больше семи точек. Два квадрата с двумя общими вершинами (всего 6 вершин) могут либо иметь общую сторону, либо располагаться так, что стороной одного из них является диагональ другого. Как нетрудно видеть, для седьмой точки существует лишь три (с точностью до симметрии) варианта расположения относительно остальных точек с условием, чтобы она также была вершиной некоторого квадрата.



Легко убедиться, что в каждом из этих вариантов существует не более трех квадратов с вершинами в отмеченных точках. Итак, отметить 7 точек, удовлетворяя условию задачи, нельзя. Способ отметить на плоскости 8 точек так, чтобы нашлось четыре квадрата с вершинами в этих точках, показан на рисунке.