Решения задач 41 Турнир Городов Весенний тур БАЗОВЫЙ вариант

8–9 классы

1. Ответ: может.

Решение. Сразу заметим, что минимальное количество королевств, которое может претендовать на спорную территорию – это 0, если по соседству с ней нет ни одного королевства, а максимальное количество – 8, когда во всех соседних клетках и по вершине и по стороне находится королевство. Тогда для того, чтобы на любые две спорные территории претендовало разное количество королевств, необходимо, чтобы на одну спорную территорию претендовало 0 королевств, на другую – 1 королевство, на третью – 2 и т.д. на девятую – 8 королевств. Остается построить пример.

0	1	*	*	*	*
2	3	5	*	8	*
*	*	6	*	*	*
*	*	*	*	*	*
4	7	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

В данном примере клетки с крестиками обозначают королевства, а клетки с числами – спорные территории. Число, записанное в клетке спорной территории, – количество королевств, претендующих на данную спорную территорию.

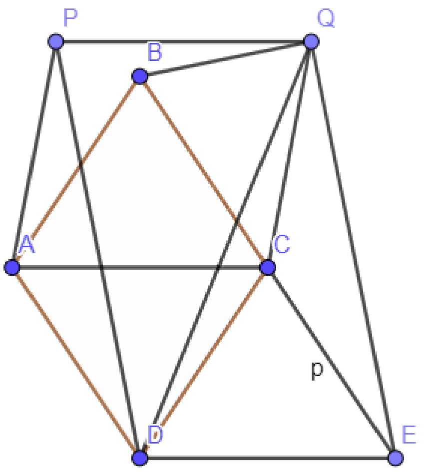
2. Ответ: 22.

Решение. Пусть в ряд записаны числа a_1, a_2, a_3, ... Если $a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+10} = 100$, то сумма $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+11} = 101$ (в противном случае, $a_k = a_{k+11}$, чего не может быть по условию задачи), откуда $a_{k+11} = a_k + 1$. Аналогично, если $a_k + a_{k+1} + ... + a_{k+10} = 101$, то сумма $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+11} = 100$, откуда $a_{k+11} = a_k - 1$.

Пусть $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 100$, тогда по доказанному выше $a_2 + a_3 + ... + a_{12} = 101$ и $a_{12} = a_1 + 1$, далее $a_3 + a_4 + ... + a_{13} = 100$ и $a_{13} = a_2 - 1$. Продолжая данную цепочку рассуждений, через несколько шагов придем к соотношению $a_{23} = a_{12} - 1 = a_1 + 1 - 1 = a_1$. Т.е. a_{23} обязательно совпадет с a_1. Случай $a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 101$ рассматривается абсолютно аналогично. Таким образом, получаем, что максимальное количество различных чисел, которое можно выписать подряд, чтобы выполнялось условие задачи, не превосходит 22. Приведем пример на 22 числа:

100, -10, 10, -20, 20, -30, 30, -40, 40, -50, 50, 101, -11, 11, -21, 21, -31, 31, -41, 41, -51, 51.

3.



Решение. 0) Пусть длина стороны ромба равна a.

1) Известно, что диагонали ромба перпендикулярны, следовательно, DB перпендикулярно AC, а поскольку AC||PQ, то DB перпендикулярно PQ, и, следовательно, DB – высота в треугольнике PDQ.

2) Дополнительное построение: через точку D проведем прямую параллельную AC и на этой прямой отложим отрезок DE равный AC, как показано на рисунке. Тогда ACED – параллелограмм. Следовательно, CE = AD = a.

3) Т.к. BC||AD и CE||AD, BC и CE проходят через одну точку C, то BC и CE лежат на одной прямой.

4) По условию PQ = AC и PQ||AC, по построению DE = AC и DE||AC, следовательно PQ = DE и PQ||DE, а значит, PQED – параллелограмм и, следовательно, QE||PD.

5) По условию APQC – параллелограмм и AP = AB = a, следовательно, QC = AP = a.

6) Рассмотрим треугольник BCQ. Он равнобедренный, т.к. BC = CQ = a. Пусть углы при основании QBC и BQC равны β, тогда угол BCQ = 180 – 2β.

7) Угол QCE является смежным к углу BQC и, следовательно, равен 2β.

8) Рассмотрим треугольник CQE, он равнобедренный, т.к. CE = QC = a. Поскольку угол QCE = 2β, то углы при основании CQE и CEQ равны по 90 – β.

9) Угол BQE = угол BQC + угол CQE = β + 90 – β = 90, следовательно QB перпендикулярно QE, а т.к. QE||PD, то QB перпендикулярно PD, т.е. QB – высота треугольника PDQ. А т.к. в треугольнике высоты

пересекаются в одной точке и две высоты DB и QB уже пересеклись в точке B, то B - точка пересечения высот треугольника DPQ.

4. Решение. Пусть x_1, y_1 и z_1 – целочисленные решения уравнения $x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx = n$. Покажем, что $x = (z_1-x_1)$ и $y = (z_1-y_1)$ являются целочисленными корнями уравнения $x^2 + y^2 - xy = n$. Заметим, что если x_1, y_1 и z_1 целые числа, то z_1-x_1 и z_1-y_1 тоже целые числа. Подставим эти корни в левую часть второго уравнения

$(z_1-x_1)^2 + (z_1-y_1)^2 - (z_1-x_1)(z_1-y_1) = z_1^2 + x_1^2 - 2z_1x_1 + z_1^2 + y_1^2 - 2z_1y_1 - z_1^2 + z_1y_1 + z_1x_1 - x_1y_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1y_1 - y_1z_1 - z_1x_1 = n$ (по условию).

Замечание: Понять, что именно такие корни подставлять во второе уравнение, можно если каждое из уравнений умножить на 2 и левые части представить в виде суммы трех квадратов.

5. Ответ: выигрывает второй игрок, т.е. Вася.

Решение. Приведем стратегию, придерживаясь которой, второй всегда выигрывает. Вначале заметим, что тот, кто поставит любую из фишек в строку 8 или столбце h сразу проигрывает, т.к. другой игрок своим ходом передвинет эту фишку в клетку h8.

Позиция 1. Перед ходом первого игрока фишки стоят на диагонали a1–h8 и при этом, клетки на которых они стоят не соседствуют по вершине. Заметим, что начальное положение фишек соответствует описанной ситуации. Тогда, после хода первого игрока может получиться одна из следующих 4 ситуаций:

а) Фишка оказалась в строке 8 или столбце h, тогда второй двигает ее в клетку h8 и выигрывает.

б) Фишки оказываются в одной строке или одном столбце, в этом случае второй игрок придвигает одну из фишек вплотную ко второй, т.е. так, чтобы они оказались в соседних клетках (позиция 2). Например, если фишки оказались в одной строке, то левую фишку мы придвигаем вплотную к правой. Заметим, что если изначально фишки стояли на диагонали a1–h8 и при этом, клетки, на которых они стояли, не соседствую по вершине, то после хода первого игрока они не могут оказаться в соседних по стороне клетках и, значит, второй игрок может сделать описанный ход. При этом еще заметим, что второй игрок всегда приставляем фишку либо слева, либо снизу, и значит на своем ходу он не может поставить фишку в строку 8 или столбец h таблицы.

в) Фишки оказались в соседних строках, но разных столбцах, или соседних столбцах, но разных строках. Рассмотрим ситуацию, когда они оказались в соседних строках, но разных столбцах. Второй игрок двигает фишку, которая оказалась в более левом столбце, вправо так, чтобы две фишки оказались в одном столбце (позиция 2). Заметим, что при описанной ситуации второй всегда может сделать ход, при этом, после хода второго фишка, которую двигали, может оказаться в столбце h или строке 8, только если фишка, которую мы двигали, уже была в строке 8, или фишка, к которой мы приставляли вторую, уже была в столбце h. В любой из этих позиций второй игрок должен был походить согласно пункту а). Случай соседних столбцов, но разных строк рассматривается аналогично.

г) Позиция фишек не описывается ни одной из ситуаций а)–в). Тогда второй игрок возвращает фишку, которую только что двигал первый игрок, на диагональ a1–h8. Поскольку фишки не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке, то второй игрок всегда может сделать такой ход. Кроме того, заметим, что после такого хода, фишки не могут оказаться в соседних по вершинах клетках, т.к. перед ходом второго, они не находятся ни в соседних строках, ни в соседних столбцах, а значит мы получаем позицию 1.

Позиция 2. Перед ходом первого фишки стоят в соседних клетках. Если после хода первого игрока одна из фишек оказалась в строке 8 или столбце h, тогда второй двигает ее в клетку h8 и выигрывает. В противном случае второй игрок двигает вторую фишку (которую не двигал первый) так же, как первый игрок двигал первую фишку. Легко проверить, что если первый игрок сумел сделать ход, то и второй обязательно сможет это сделать, причем, если после хода первого игрока, первая фишка не окажется в строке 8 или столбце h, то и после хода второго вторая фишка тоже не окажется в строке 8 или столбце h.

Таким образом, при описанной стратегии второй игрок всегда может походить после хода первого, причем второй игрок всегда ставит фишки не в строку 8 или столбец h. Значит, рано или поздно первый будет вынужден поставить одну из фишек либо в строку 8 либо в столбец h, и проиграет. Действительно, количество ходов в данной игре всегда конечно. Введем в рассмотрение величину, равную сумме координат каждой из фишек. Будем считать, что столбец a - это столбец с номером 1, b – столбец с номером 2 и т.д., h – столбец с номером 8. Изначально рассматриваемая величина равна 8 ((1+1) + (3+3) = 8). Заметим, что на каждом ходу эта величина увеличивается хотя бы на 1. Максимальное значение, которое может принять эта величина, равно 8 + 8 + 7 + 8 = 31. Значит, количество ходов в игре гарантированно не превосходит 23.