СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 1 марта 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Существует ли число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, …, 9 поровну?

5 — 2. Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич — треть всех голов и ещё две, Алёша Попович — четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею? (Напомним, что $41! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 41$.)

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если

4 — а) $N = 19$;

3 — б) $N = 20$?

8 — 4. Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N \times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

9 — 5. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

9 — 6. У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

12 — 7. Глеб задумал натуральные числа N и a, где $a < N$. Число a он написал на доске. Затем Глеб стал проделывать такую операцию: делить N с остатком на последнее выписанное на доску число и полученный остаток от деления также записывать на доску. Когда на доске появилось число 0, он остановился. Мог ли Глеб изначально выбрать такие N и a, чтобы сумма выписанных на доске чисел была больше $100N$?

СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 1 марта 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. На плоскости даны две параболы: $y = x^2$ и $y = x^2 - 1$. Пусть U — множество всех точек плоскости, лежащих между параболами (включая точки на самих параболах). Существует ли отрезок длины более 10^6, целиком содержащийся в U?
5	2. Алёша задумал натуральные числа a, b, c, а потом решил найти такие натуральные x, y, z, что $a = \text{НОК}(x, y)$, $b = \text{НОК}(x, z)$, $c = \text{НОК}(y, z)$. Оказалось, что такие x, y, z существуют и определены однозначно. Алёша рассказал об этом Боре и сообщил ему только числа a и b. Докажите, что Боря может восстановить c.
8	3. Может ли в сечении какого-то тетраэдра двумя разными плоскостями получиться два квадрата: один — со стороной, не большей 1, а другой — со стороной, не меньшей 100?
9	4. К Ивану на день рождения пришли $2N$ гостей. У Ивана есть N чёрных и N белых цилиндров. Он хочет устроить бал: надеть на гостей цилиндры и выстроить их в хороводы (один или несколько) так, чтобы в каждом хороводе было хотя бы два человека и люди в цилиндрах одного цвета не стояли в хороводе рядом. Докажите, что Иван может устроить бал ровно $(2N)!$ различными способами. (Цилиндры одного цвета неразличимы; все гости различимы.)
9	5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружности с диаметрами AB и CD пересекаются в двух точках X_1 и Y_1. Окружности с диаметрами BC и AD пересекаются в двух точках X_2 и Y_2. Окружности с диаметрами AC и BD пересекаются в двух точках X_3 и Y_3. Докажите, что прямые X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 пересекаются в одной точке.
10	6. На доске написаны $2n$ последовательных целых чисел. За ход можно разбить написанные числа на пары произвольным образом и каждую пару чисел заменить на их сумму и разность (не обязательно вычитать из большего числа меньшее, все замены происходят одновременно). Докажите, что на доске больше никогда не появятся $2n$ последовательных чисел.
12	7. Для каких k можно закрасить на белой клетчатой плоскости несколько клеток (конечное число, большее нуля) в чёрный цвет так, чтобы на любой клетчатой вертикали, горизонтали и диагонали либо было ровно k чёрных клеток, либо вовсе не было чёрных клеток?