6 – 7 класс

Предварительные решения

заданий 6-7 класса 42-го Турнира Городов (осень базовый тур)

1. Таблица 5×5 заполнена нулями. За ход разрешается прибавить к любым трем числам таблицы по 1. Можно ли за несколько ходов заполнить эту таблицу числами 1,2,3, ..., 25?

Ответ: **нет!**

Решение. Сумма всех чисел в таблице в любой момент всегда будет кратна 3, а $1+2+3+...+25 = 325$ не делится на 3 (инвариант – остаток от деления на 3).

2. В ряд выстроились 50 школьников. Среди них 15 учеников 7 «А» класса, 10 учеников 7 «Б» класса, 10 учеников 7 «В» класса и еще 15 шестиклассников. Известно, что никакие два семиклассника из разных классов не стоят рядом. Докажите, что какие-то три школьника, стоящие подряд, учатся в одном и том же классе.

Доказательство.

Используем принцип Дирихле: 15 шестиклассников «разбивают» ряд максимум на 16 групп рядом стоящих 7-классников! Всего семиклассников 35, значит, в какой-то группе обязательно будет не менее 3 школьников. А в группе из трех подряд идущих семиклассников, согласно условию, не могут стоять рядом ученики из разных классов, значит, все они из одного класса!

Пример, демонстрирующий такую возможность, строится очевидно: пусть 15 шестиклассников делят ряд на 13 групп по два семиклассника и 3 группы по три семиклассника. Учеников 7 «Б» и 7 «В» классов расставим в 10 групп по два, а учеников 7 «А» класса в 3 группы по два и три группы по три ученика.

3. Найдите наименьшее натуральное число такое, что суммы подряд идущих его цифр дают все натуральные числа от 1 до 9 (сама цифра считается суммой с одним слагаемым).

Ответ: **1143.**

Решение. Ясно, что если число трехзначное, то из его цифр можно составить максимум 7 различных сумм – а должно быть 9.

Цифра 1 должна присутствовать в искомом числе. А три цифры 1, вместе с любой 4-й цифрой дадут опять же не более 7 различных сумм.

Если брать две цифры 1 и цифру 2, то следующая цифра должна быть 5; если брать две цифры 1 и цифру 3, то следующая цифра должна быть (или может быть) 4. В этих случая можно из приведенного набора цифр построить все суммы от 1 до 9.

Осталось простым перебором найти наименьшее возможное число, для которого будет выполняться дополнительное условие: суммы некоторых подряд идущих цифр дадут все значения от 1 до 9. Это будет число 1143.

4. Пусть p и q – такие целые числа, что $(16p + 17q)(17p + 16q)$ делится на 11. Докажите, что $(16p + 17q)(17p + 16q)$ делится на 121.

Доказательство.

11 – число простое. Значит, один из сомножителей $(16p+17q)$ *или* $(17p+16q)$ обязательно делится на 11. Заметим, что сумма сомножителей равна $33p + 33q$ и тоже делится на 11, а значит, и второй сомножитель тоже делится на 11, а поэтому их произведение делится на 121.

5. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

Решение. Алгоритмов действий может быть несколько. Опишем один из них.

Будем обозначать слонов по порядку, указанному в условии: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, причем, начиная с 3-го, и каждый следующий за ним, имеет массу, равную сумме двух предыдущих. Для первого взвешивания возьмем на одну чашу весов слонов с номерами 2, 3 и 8, а на вторую – 4, 6 и 7. Понятно, что если среди нет похудевшего слона, то чаши уравновесятся, а если есть, то чаша, на которой окажется «худой» слон (будем его далее так называть) будет легче. Запишем это в виде такой схемы:

1-е взвешивание: на весах располагаются слоны с номерами: **I чаша - (2, 3, 8) ** II чаша - (4, 6, 7)**,

Возможные варианты: **1.1. I чаша - (2, 3, 8) < II чаша - (4, 6, 7)**,
1.2. I чаша - (2, 3, 8) > II чаша - (4, 6, 7),
1.3. I чаша - (2, 3, 8) = II чаша - (4, 6, 7).

Рассмотрим эти варианты по очереди.

1.1. В этом случае «худой» слон точно есть, и его номер 2, 3 или 8.

теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (1, 2) ** II чаша - (3),

- если чаши уравновесятся, то 1,2 и 3 – нормальные слоны, а худой – 8-й,
- если I чаша – легче, то худой слон – 2-й,
- если I чаша – тяжелее, то худой слон – 3-й.

1.2. В этом случае «худой» слон точно есть, и его номер 4, 6 или 7.

теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (4, 5) **   II чаша - (6),

- если чаши уравновесятся, то 4, 5 и 6 – нормальные слоны, а худой – 7-й,
- если I чаша – легче, то худой слон – 4-й,
- если I чаша – тяжелее, то худой слон – 6-й.

1.3. В этом неизвестно есть ли «худой» слон, и если все же есть, то его номер 1 или 5. теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (1, 2, 4) **   II чаша - (5).

Заметим, что если на чашах весов нормальные слоны, то чаши уравновесятся, т.е. 1 и 5 – не худые, и слух был неверный.

- если же I чаша – легче, то худой слон – 1-й,
- если же I чаша – тяжелее, то худой слон – 5-й.

Решение закончено!