# СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

## РЕШЕНИЯ ОСЕННЕГО ТУРА

## БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

### 8 – 9 классы

**1 [3].** *На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?*

*(Сергей Дворянинов)*

**Ответ:** не может.

Треугольник прямоугольный тогда и только тогда, когда некоторые две его вершины — диаметрально противоположные точки его описанной окружности. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют ровно 98 прямоугольных треугольников, для разных пар они различны. Поэтому общее количество прямоугольных треугольников делится на 98, но 1000 не делится на 98.

**2.** *Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что*
**а) [2]** *каждый побывал в полуфинале более одного раза;*
**б) [3]** *каждый побывал в финале.*

*(Борис Френкин)*

По условию каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ партий. Поскольку каждый год играется 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3 + 3 \cdot 1 = 6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырёх финалах было $2 \cdot 4 = 8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$ партий, что противоречит условию.

**3 [5].** *В куче $n$ камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких $n$ начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

*(Фёдор Ивлев)*

**Ответ:** при $n$, не кратном 4.

Стратегия: каждый раз оставлять в куче кратное 4 число камней: при $n = 4k + 1$ надо взять один камень, при $n = 4k + 2$ — два камня; при $n = 4k + 3$ надо взять $p$ камней, где $p$ — простой делитель числа $n$ вида $4q + 3$ (такой есть, иначе все простые делители $n$ имеют вид $4m + 1$, а произведение чисел такого вида тоже имеет такой вид и не равно $4k + 3$).

Противник из кучи с кратным 4 числом камней не может взять число камней, кратное 4 (это будет не простое число), поэтому начинающий и дальше может играть по стратегии.

**4 [5].** *Дан равносторонний треугольник со стороной $d$ и точка $P$, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам $a$, $b$ и $c$. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной $a$ и точка $Q$, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны $b$, $c$ и $d$.*

*(Александр Эвнин)*

Пусть $A$, $B$, $C$ — вершины данного треугольника, такие, что $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$. Пусть $F$ — образ точки $P$ при повороте вокруг $A$ на $60°$, переводящем $C$ в $B$. Тогда треугольник $APF$ — равносторонний со стороной $a$, и отрезок $FB$ является образом отрезка $PC$ при этом повороте, откуда $FB = PC = c$. При этом $AB = d$, $PB = b$, и, значит, треугольник $APF$ вместе с точкой $B$ образуют нужную конфигурацию.

**5 [5].** *Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)*

*(Александр Грибалко)*

Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым — два первых столбца. За первое взвешивание мы найдём строку, где должен быть похудевший слон, если он есть, а за второе — столбец. На пересечении этой строки и столбца и будет похудевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто из слонов не похудел).

| | | |
|---|---|---|
| **2** | **6** | **1** |
| **3** | **4** | **5** |
| **8** | **7** | |

## 10 – 11 классы

**1 [3].** *Каждый из квадратных трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $P(x) + Q(x)$ с действительными коэффициентами имеет кратный корень. Обязательно ли все эти корни совпадают?*

*(Борис Френкин)*

**Ответ:** обязательно.

**Первое решение.** Предположим противное: $P(x)$ и $Q(x)$ имеют кратные корни $a$ и $b$ соответственно, $a \neq b$. Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в одну сторону, то трёхчлен $P(x) + Q(x)$ не имеет корней (все его значения одного знака и ненулевые). Если ветви графиков $y = P(x)$ и $y = Q(x)$ направлены в разные стороны, то в точках $a$ и $b$ трёхчлен $P(x)+Q(x)$ принимает значения разных знаков, что невозможно для трёхчлена с кратным корнем. Противоречие.

**Второе решение.** Пусть $c$ и $d$ — кратные корни, $a$ и $b$ — старшие коэффициенты у $P$ и $Q$ соответственно. Тогда $P(x) + Q(x) = a(x - c)^2 + b(x - d)^2 = (a + b)x^2 - 2(ac + bd)x + ac^2 + bd^2$, и поскольку этот трёхчлен имеет кратный корень, его дискриминант равен нулю, то есть

$$0 = (ac + bd)^2 - (a + b)(ac^2 + bd^2) = 2abcd - abd^2 - bac^2 = ab(c - d)^2,$$

откуда, так как $a$ и $b$ ненулевые, имеем $c = d$, и потому все три трёхчлена имеют кратный корень $c$.

**Третье решение.** Трёхчлен, имеющий кратный корень, с точностью до знака является полным квадратом. Без ограничения общности $P(x) = R^2(x)$. Рассмотрим два случая.

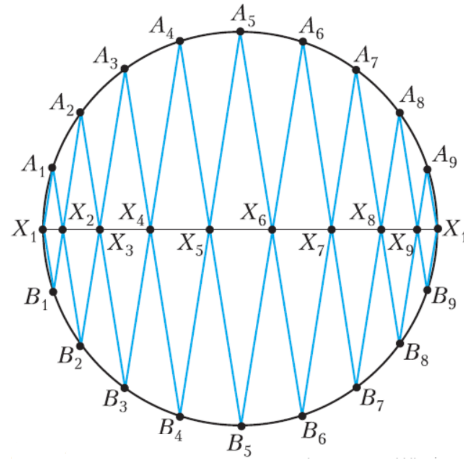
1) $Q(x) = S^2(x)$. Тогда $P(x) + Q(x) = R^2(x) + S^2(x)$ обращается в ноль только в точке, являющейся общий корнем $R(x)$ и $S(x)$, то есть общим корнем $P(x)$ и $Q(x)$.

2) $Q(x) = -S^2(x)$. Тогда трёхчлен $P(x) + Q(x) = (R(x) - S(x))(R(x) + S(x))$ имеет кратный корень, только когда корни линейных функций $R(x) - S(x)$ и $R(x) + S(x)$ совпадают. Но в такой точке $R(x) = S(x) = 0$.

**2 [4].** *На прямой отметили точки $X_1, \ldots, X_{10}$ (именно в таком порядке) и построили на отрезках $X_1X_2$, $X_2X_3$, ..., $X_9X_{10}$ как на основаниях равнобедренные треугольники с углом $\alpha$ при вершинах. Оказалось, что все эти вершины лежат на полуокружности с диаметром $X_1X_{10}$. Найдите $\alpha$.*

*(Егор Бакаев)*

**Ответ:** 18°. Пусть построены треугольники $X_1A_1X_2$, …, $X_9A_9X_{10}$, а точки $B_1$, …, $B_9$ симметричны точкам $A_1$, …, $A_9$ соответственно (относительно прямой $X_1X_{10}$). Очевидно, точка $X_i$ лежит на хорде $B_{i-1}A_i$ и на хорде $B_iA_{i-1}$ ($i = 2, \ldots, 9$), поскольку при отражении возникают вертикальные углы (угол при основании равнобедренного треугольника и такой же угол отражённого соседнего треугольника). Поэтому




$$\angle X_1B_1A_2 = \angle A_2B_3A_4 = \angle A_4B_5A_6 = \angle A_6B_7A_8 = \angle A_8B_9X_{10} = \alpha.$$

Следовательно, $5\alpha$ равно половине дуги $X_1X_{10}$, то есть 90°.

**3 [5].** *Натуральное число $N$ кратно 2020. В его десятичной записи все цифры различны, причём если любые две из них поменять местами, получится число, не кратное 2020. При каком количестве цифр в десятичной записи числа $N$ такое возможно?*

*(Сергей Токарев)*

**Ответ:** при 6 цифрах.

Если в числе седьмая цифра справа — это $a$, а третья справа — это $b$, то, меняя их местами, мы изменим число на $b \cdot 10^6 - a \cdot 10^6 + a \cdot 10^2 - b \cdot 10^2 = (b-a) \cdot (10^4 - 1) \cdot 100$. Значит, при такой замене делимость на $2020 = 20 \cdot 101$ не испортится, поскольку $10^4 - 1$ делится на 101, а 100 делится на 20. Поэтому больше 6 цифр в числе $N$ быть не может

Шесть цифр может быть. Например, подходит число 351480 (0 должен оставаться в конце, обмен 3 и 8 испортит делимость на 4, а обмен соседних цифр или цифр, стоящих через одну или через две, испортит делимость на 101, поскольку числа $10 - 1$, $10^2 - 1$ и $10^3 - 1$ на 101 не делятся). Есть и другие примеры, скажем, 531260.

Пяти- или четырёхзначное число, кратное 2020, получается умножением 2020 на число $10a + b$, меньшее 50. У числа $2020b$ вторая и четвёртая цифры равны, а у числа $20200a$ они равны нулю, поэтому у суммы эти цифры равны, что нас не устраивает.

**4 [5].** *Стороны треугольника разделены основаниями биссектрис на два отрезка каждая. Обязательно ли из шести образовавшихся отрезков можно составить два треугольника?*

*(Лев Емельянов)*

**Ответ:** обязательно.

Пусть $a \leqslant b \leqslant c$ — длины сторон треугольника. Тогда стороны разделятся на такие части:

$$a = \frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}, \quad b = \frac{ba}{a+c} + \frac{bc}{a+c}, \quad c = \frac{ca}{a+b} + \frac{cb}{a+b}.$$

Из отрезков, составляющих $c$, первый меньше $a$, а второй меньше $b$ (так как $\frac{c}{a+b} < 1$).

Тогда возьмём в первую тройку отрезки $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$ составляющие $a$, и отрезок $\frac{ca}{a+b}$. Последний из них наибольший (его знаменатель не больше, а числитель не меньше, чем у других), но меньше $a$.

Во вторую тройку возьмём отрезки $\frac{ba}{a+c}$ и $\frac{bc}{a+c}$, составляющие $b$, и отрезок $\frac{cb}{a+b}$. Последний из них наибольший (аналогично), но меньше $b$.

Возможны и другие способы разбить отрезки на две тройки.

**5.** *По кругу лежит 101 монета, каждая весит 10 г или 11 г. Докажите, что найдётся монета, для которой суммарная масса $k$ монет слева от неё равна суммарной массе $k$ монет справа от неё, если*

**а)** **[3]** $k = 50$*;*

**б)** **[3]** $k = 49$.

*(Александр Грибалко)*

Решим сразу оба пункта. Пусть $k$ — любое из чисел 49 или 50. Раскрасим монеты в чёрный и белый цвета (10 г — одним цветом, 11 г — другим). Монет какого-то цвета, скажем, белых, будет нечётное количество, пусть $2m+1$. Надо доказать, что среди $k$ монет справа и $k$ монет слева от какой-то монеты будет поровну белых.

Предположим противное. Тогда $m > 0$, иначе единственная белая монета — искомая. Назовём белую монету *правой*, если среди $k$ монет справа от неё белых больше, чем среди $k$ монет слева от неё, в противном случае — *левой* . Так как белых монет $2m+1$, правых и левых монет будет не поровну, пусть правых больше.

Пусть $A$ — правая монета, а $B$ — $m$-я справа от $A$ белая монета (то есть на дуге, идущей вправо от $A$ к $B$, белых монет между $A$ и $B$ ровно $m-1$).

Если бы среди $k$ монет справа от $A$ не было $B$, то среди них было бы не более $m-1$ белой монеты. Так как $k \geq 49$, то вместе среди $k$ монет слева от $A$ и $k$ монет справа от $A$ хотя бы $2m-2$ белые монеты, поэтому среди $k$ монет слева от $A$ было бы тогда не менее $m-1$ белой, то есть не меньше, чем справа, что противоречит тому что $A$ — правая.

Значит среди $k$ монет справа от $A$ есть $B$, но тогда среди $k$ монет слева от $B$ встречаются все белые монеты, лежащие на дуге, идущей вправо от $A$ к $B$, и сама монета $A$, то есть среди них встречается не менее $m$ монет. Так как $k \leq 50$, то вместе среди $k$ монет слева от $B$ и $k$ монет справа от $B$ не более $2m$ белых, поэтому среди $k$ монет справа от $B$ не более $m$ белых, то есть не больше, чем слева. Значит, монета $B$ — левая.

Итак, для всякой правой монеты $m$-я справа от неё белая монета — левая. Значит, левых не меньше, чем правых, противоречие.

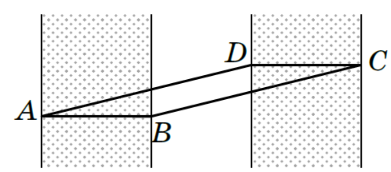
## СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

### 8 – 9 классы

**1 [4].** *Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?*

*(Александр Перепечко)*

**Ответ:** нет. Возьмём параллелограмм, как на рисунке. Если бы окружность пересекла его стороны $AB$ и $CD$, то её центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку $AB$ и на каком-то перпендикуляре к отрезку $CD$. Но такие перпендикуляры не пересекаются (они лежат в непересекащихся полосах).




**2 [7].** *Назовём пару различных натуральных чисел* удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары $(a, b)$ и $(b, a)$ считаются одинаковыми.)*

*(Борис Френкин)*

**Ответ:** да, верно.

Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу $m$. Тогда числа из этой пары — одной чётности, и их можно представить в виде $m+n$ и $m-n$, где $n$ тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары — натуральное число, их произведение — полный квадрат: $m^2 - n^2 = k^2$, где $k$ натуральное. Тогда $m^2 - k^2 = n^2$, откуда $m+k$ и $m-k$ — удачная пара с тем же средним арифметическим, причём $k \neq n$ (иначе $m^2 = 2n^2$, что невозможно в силу иррациональности $\sqrt{2}$).

**Замечание.** Если числа исходной пары — это $a, b$, то числа новой пары имеют вид $\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{ab}$.

**3.** *Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было*
**а) [3]** *хотя бы сто чисел 5;*
**б) [4]** *хотя бы сто чисел 10?*

*(Андрей Аржанцев)*

а) **Ответ:** не всегда.

Пусть Вася действует так: если Петя называл чётное число, Вася его и записывает, а если Петя назвал нечётное — записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечётное число лишь один раз — когда Петя впервые назвал нечётное число. Значит, на доске будет написано не более одного нечётного числа, и тем самым не более одной пятёрки.

б) **Ответ:** всегда.

Как Пете добиться того, чтобы Вася написал на доске число 10:

(1) Если сумма чисел на доске равна 0, то Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.

(2) Если сумма чисел на доске равна $-5$, то Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).

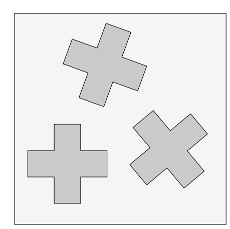
(3) Если сумма чисел на доске равна 5, то Петя называет число $-10$, и Вася либо пишет число $-5$ и попадает в ситуацию (1), либо пишет число $-10$ и попадает в ситуацию (2).

(4) Если сумма чисел на доске равна 10, то Петя называет число $-15$, и Вася либо пишет число $-15$ и попадает в ситуацию (2), либо пишет число $-5$ и попадает в ситуацию (3).

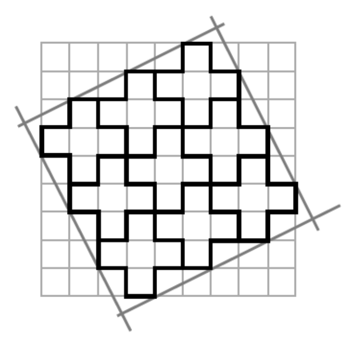
Заметим, что если на доске другая сумма чисел, скажем $n$, то Петя может назвать число $-n+10$, и Вася либо напишет число 10, либо попадёт в ситуацию (4). Таким образом, имея любой набор чисел на доске, мы можем в итоге заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем сделать так, чтобы на доске было 100 десяток.

**4. [7]** *Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков $1 \times 1$ (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски $8 \times 8$ вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов?*

*(Александр Грибалко)*



**Ответ:** можно. Расположим 9 крестов, как на рисунке, и опишем вокруг них квадрат. Этот квадрат состоит из девяти крестов (их суммарная площадь равна 45), восьми половинок прямоугольников $1 \times 2$ (их суммарная площадь равна 8) и четырёх «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника $1 \times 2$ и половинки клетки, то есть его площадь не больше 1,5, откуда все уголки суммарно имеют площадь не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45 + 8 + 6 = 59$, что меньше 64. Значит, сторона квадрата меньше 8, и его можно уместить на шахматную доску — а с ним и 9 крестов.



Несложно найти и точную длину стороны нашего квадрата — это $\frac{17}{\sqrt{5}}$.

**5. [8]** *Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?*

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** существуют.

**Первое решение.** Заметим, что $3^3+4^3+5^3=6^3$ (проверьте!). Домножив это равенство на $2^3$, получим: $6^3+8^3+10^3=12^3$. Заменяя $6^3$ на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3$. Домножив новое равенство на $2^3$ и снова заменяя $6^3$ на сумму трёх кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб:

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+20^3=24^3.$$

Действуя далее аналогично, мы сможем получить и 99 кубов, дающих в сумме куб, что и требуется в задаче.

**Второе решение.** Воспользуемся формулой $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Заметим, что

$$11^3+12^3+\ldots+109^3=(1^3+2^3+\ldots+109^3)-(1^3+2^3+\ldots+10^3)=\left(\frac{109\cdot 110}{2}\right)^2-\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{109^2\cdot 110^2-110^2}{4}=110^2\cdot\frac{109^2-1}{4}=110^2\cdot\frac{110\cdot 108}{4}=110^3\cdot 27=330^3.$$

**6. [10]** *За каждым из двух круглых столиков сидит по $n$ гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой $n$ пар гномов из этих $2n$ пар. При каких $n$ добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

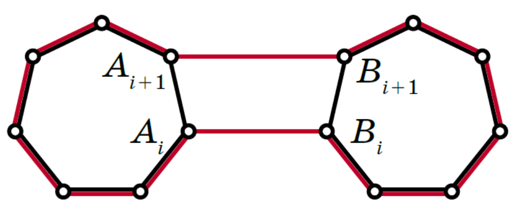
*(Михаил Святловский)*

**Ответ**: при всех нечётных $n>1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

*Случай нечётного $n$.* Пусть $n=2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов $(A_i, B_i)$ и $(A_i, B_{i+1})$ (здесь мы считаем, что $B_{2k}=B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.

Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар $(A_i, B_i)$ хотя бы $k$ всё ещё дружат, либо среди пар $(A_i, B_{i+1})$ хотя бы $k$ все еще дружат. Тогда в первом случае найдется $i$, для которого обе пары гномов $(A_i, B_i)$, $(A_{i+1}, B_{i+1})$ дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.



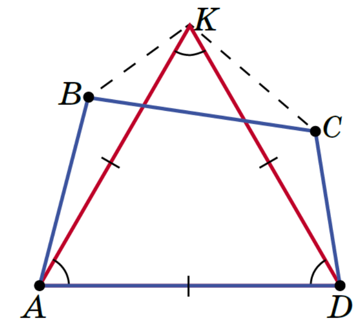

*Случай чётного $n$.* Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит $n$. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома $A_{2l+1}$ — его старые соседи $A_{2l}$ и $A_{2l+2}$, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

**7.** *Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что*

**а) [6]** *один из углов этого четырёхугольника не больше $60°$;*

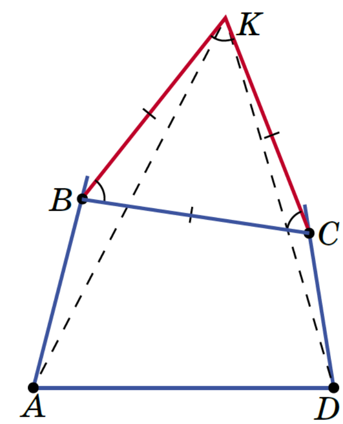
**б) [6]** *один из углов этого четырёхугольника не меньше $120°$.*

*(Максим Дидин)*




**Первое решение.** Пусть $AD$ — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше $AD$.

а) Пусть углы $A$ и $D$ оба больше $60°$. Построим на стороне $AD$ равносторонний треугольник $AKD$ во внутреннюю сторону четырёхугольника. Его стороны $AK$ и $DK$ выходят из вершин $A$ и $D$ внутрь четырёхугольника. Точка $K$ будет лежать вне четырёхугольника (иначе $AB+BC+CD > AK+KD = 2AD$, и тогда какие-то две стороны из $AB, BC, CD$ в сумме больше $AD$, противоречие). Тогда $\angle BKC > 60°$, откуда в треугольнике $BKC$ сторона $BC$ не самая маленькая. Пусть она больше, например, $BK$. Тогда $AB+BC > AB+BK > AK = AD$ — противоречие.




б) Пусть каждый из углов $B$ и $C$ меньше $120°$. Продлим лучи $AB$ и $DC$, дополнительные углы будут больше $60°$. Построим на стороне $BC$ равносторонний треугольник $BKC$ во внешнюю сторону четырёхугольника. Тогда угол $AKD$ будет меньше $60°$ (стороны $BK$ и $CK$ «загибаются внутрь» от лучей), и значит, в треугольнике $AKD$ сторона $AD$ не самая большая. Пусть она меньше, например, чем $AK$. Тогда получаем: $AD < AK < AB+BK = AB+BC$ — противоречие.

**Второе решение.** Пусть $AD$ — наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$ и $CD \le AB$. Поскольку $AD \ge BC+CD > BD$, угол $A$ острый. Аналогично угол $D$ острый. Поэтому проекции $P$ и $Q$ точек $B$ и $C$ на прямую $AD$ лежат на интервале $AD$.

а) Предположим, что оба угла $A$ и $D$ больше $60°$. Тогда $AD = AP+PQ+QD < \frac{1}{2}AB+BC+$ $+\frac{1}{2}CD \leqslant AB+BC$, то есть из сторон $AD$, $AB$ и $BC$ можно составить треугольник. Противоречие.

б) Заметим, что $PQ \leqslant BC$, $AB+BC \leqslant AD$, откуда $AB \leqslant AD-PQ = AP+QD$. Отметим такие точку $X$ на луче $BP$ и точку $Y$, что $BX = CQ$, $\overrightarrow{BY} = \overrightarrow{CD}$. Тогда треугольники $BXY$ и $CQD$ равны, $AY \geqslant AP+XY = AP+QD \geqslant AB \geqslant CD = BY$. Поэтому $AY$ — наибольшая сторона треугольника $ABY$, а $ABY$ — его наибольший угол, и тем самым $\angle ABY \geqslant 60°$. Тогда $\angle A+\angle D = \angle BAP+\angle BYX = \angle BAY+\angle BYA \leqslant 120°$ (использовано очевидное равенство $\angle AYX = \angle YAP$). Поскольку сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна $360°$, то $\angle B+\angle C \geqslant 240°$. Поэтому либо $\angle B \geqslant 120°$, либо $\angle C \geqslant 120°$.

А ещё мы заново решили пункт а): из неравенства $\angle A+\angle D \leqslant 120°$ следует, что хоть один из углов $A$, $D$ не больше $60°$.

## 10 – 11 классы

**1. [4]** *Даны $n$ натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.*

*(Борис Френкин)*

Пусть на чёрной доске не все числа целые. Тогда среди исходных чисел есть чётные и нечётные. Пусть $a$ — любое из чётных исходных чисел, $b$ — любое из нечётных. По условию их среднее геометрическое — целое число, то есть их произведение — полный квадрат. Если взять любые два чётных исходных числа $a_1$ и $a_2$, то тогда $a_1b$ и $a_2b$ — полные квадраты, откуда $a_1a_2b^2$ — полный квадрат, а значит, и $a_1a_2$ — полный квадрат. Аналогично, произведение любых двух нечётных исходных чисел — полный квадрат. Но тогда на белой доске все числа целые.

**2. [5]** *Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет $n$ натуральных корней, то на плоскости найдутся $a$ прямых, у которых ровно $b$ точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?*

*(Фёдор Ивлев)*

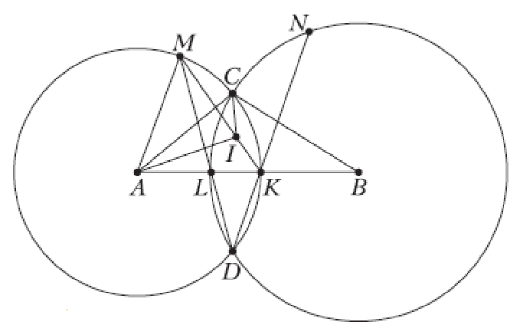
**Ответ:** не ошибается. Пусть корни многочлена из условия — числа $x_1, \ldots, x_n$. Выберем $n$ различных направлений на плоскости и возьмём $x_1$ прямых первого направления, $x_2$ — второго, ..., $x_n$ — $n$-го направления.

Тогда, по формулам Виета, число прямых $x_1 + \ldots + x_n$ будет равняться $a$, а число их точек пересечения между собой будет равняться $b$, если только никакие три прямые не пересекутся в одной точке. Этого можно добиться, проводя прямые последовательно: очередную прямую нужного направления выбираем так, чтобы она не задевала уже имеющиеся точки пересечения (их на каждом шаге конечное число).

**3. [6]** *Окружности $\alpha$ и $\beta$ с центрами в точках $A$ и $B$ соответственно пересекаются в точках $C$ и $D$. Отрезок $AB$ пересекает окружности $\alpha$ и $\beta$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Луч $DK$ вторично пересекает окружность $\beta$ в точке $N$, а луч $DL$ вторично пересекает окружность $\alpha$ в точке $M$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника $ABC$.*

*(Константин Кноп)*

Достаточно доказать, что прямая $KM$ проходит через центр вписанной окружности треугольника $ABC$ (для прямой $LN$ доказательство аналогично). Обозначим через $I$ центр описанной окружности треугольника $CKL$. Пусть $\angle CML = \varphi$. Тогда $\angle CAK = \overset{\frown}{CK} = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{CD} = \angle CMD = \varphi$ и $\angle CIL = 2\angle CKA = 180^\circ - \angle CAK = 180^\circ - \varphi$, откуда точки $M, A, L, I, C$ лежат на одной окружности. Значит, $I$ — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, откуда $AI$ — биссектриса угла $BAC$. Аналогично $BI$ — биссектриса угла $ABC$, следовательно, $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. Так как $I$ — середина дуги $\overset{\frown}{CL}$, а $K$ — середина дуги $\overset{\frown}{CD}$, точки $I$ и $K$ лежат на биссектрисе угла $CMD$, что и требовалось.




**4. [7]** *За каждым из двух круглых столиков сидит по $n$ гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой $n$ пар гномов из этих $2n$ пар. При каких $n$ добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?*

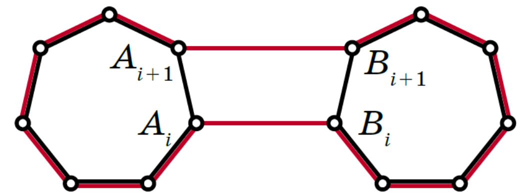
*(Михаил Святловский)*

**Ответ**: при всех нечётных $n > 1$.

Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гномов, сидящих за первым столиком, а через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — гномов, сидящих за вторым столиком.

*Случай нечётного $n$.* Пусть $n = 2k-1$. Стратегия доброго волшебника: подружить пары гномов $(A_i, B_i)$ и $(A_i, B_{i+1})$ (здесь мы считаем, что $B_{2k} = B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать доброму.

Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину указанных пар, то либо среди пар $(A_i, B_i)$ хотя бы $k$ всё ещё дружат, либо среди пар $(A_i, B_{i+1})$ хотя бы $k$ все еще дружат. Тогда в первом случае найдется $i$, для которого обе пары гномов $(A_i, B_i)$, $(A_{i+1}, B_{i+1})$ дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол следующим образом: $A_i, B_i, B_{i-1}, \ldots, B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.




*Случай чётного $n$.* Приведем стратегию злого волшебника. Пусть добрый волшебник уже как-то подружил $2n$ пар гномов; построим граф, в котором вершины соответствуют гномам, а ребра — парам гномов, которые подружил добрый волшебник. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым — в красный и синий. Так как сумма степеней всех вершин равна $4n$, найдётся цвет, для которого сумма степеней вершин, покрашенных в этот цвет, не превосходит $n$. Не умаляя общности, это белый цвет, то есть гномы $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которые входят гномы белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома $A_{2l+1}$ — его старые соседи $A_{2l}$ и $A_{2l+2}$, и очевидно, что добрый волшебник не сможет рассадить всех гномов за один стол требуемым образом.

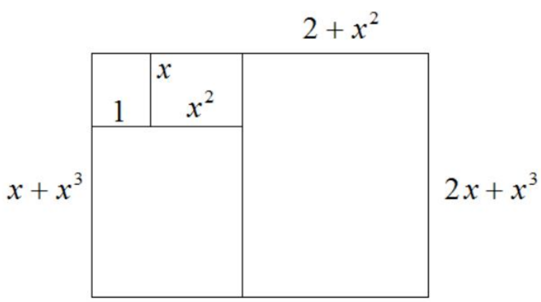
**5. [7]** *Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?*

*(Михаил Мурашкин)*

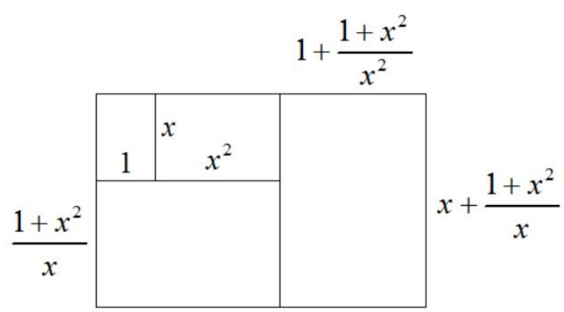
**Ответ:** да, существует.

Для начала покажем, что существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 подобных ему прямоугольника разного размера. На приведенных ниже рисунках показано, что для произвольного $x$ существует прямоугольник, который можно разрезать на 4 прямоугольника с отношением сторон, равным $x$ (два способа):

1)




2)




В первом случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1+x^2+2+x^2 = x(2x+x^3)$, откуда $x = \sqrt[4]{3}$. При этом, как несложно проверить, они имеют разный размер. Во втором случае все 4 прямоугольника будут подобны исходному, если $1 + x^2 + 1 + \frac{1+x^2}{x^2} = x(x + \frac{1+x^2}{x})$, откуда $x = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. При этом они, опять же, имеют разный размер.

Теперь перейдём к доказательству основного факта. Возьмём, для определённости, прямоугольник с отношением сторон $\sqrt[4]{3}$ и разобьём его на 4 прямоугольника указанным способом. Выберем меньший из них и разобьём таким же способом, и т.д. После каждого разбиения все прямоугольники имеют разный размер, так как мы разбиваем наименьший. После 33 разбиений мы получим 100 прямоугольников, что и требовалось.

**Замечание.** Как известно, существует разрезание квадрата как на 25, так и на 26 различных квадратов (см. ru.wikipedia.org/wiki/Квадрирование квадрата). Проведём разрезание на 25 квадратов, потом разрежем меньший из них на 26 квадратов. Получится разрезание на 50 квадратов. Повторив такую операцию еще дважды, получим разрезание квадрата на 100 различных квадратов.

**6. [10]** *Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где $n$ — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?*

*(Андрей Аржанцев)*

**Ответ:** сможет.

*Лемма.* Любое число $a$ можно представить в виде суммы $k$ дробей вида $\frac{1}{n}$ конечным числом способов (если вообще можно представить).

*Доказательство леммы.* Будем доказывать индукцией по $k$. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $k = l - 1$. Докажем для $k = l$. Посмотрим на наибольшую дробь в разложении, она не может быть меньше, чем $\frac{a}{k}$, иначе сумма всех дробей точно меньше $a$. Значит, знаменатель этой дроби точно не больше, чем $\frac{k}{a}$, то есть у нас существует конечное количество значений наибольшей дроби. Далее для каждого отдельного значения этой наибольшей дроби мы получаем, что сумма оставшихся $l - 1$ дробей должна быть каким-то фиксированным числом. По предположению индукции мы знаем, что таких $l - 1$ дробей для каждого отдельного значения наибольшей дроби конечно, а, значит, и всего представлений $a$ в виде суммы $k$ дробей конечно.

Теперь покажем, как Петя может ходить так, чтобы Вася после своего хода никогда не сделал сумму целой. Пусть перед ходом Пети сумма чисел на доске равна $S$, а Вася после его хода будет выписывать $k$ дробей. Заметим, что после хода Васи сумма чисел точно не станет больше чем $S + k + 1$, то есть он точно не получит натуральное число, большее $S + k + 1$. Для каждой из оставшихся потенциальных натуральных сумм (а их осталось конечное количество) посчитаем, на сколько надо увеличить текущую сумму, чтобы она стала такой. Из леммы следует, что для каждого такого числа существует лишь конечное количество представлений его в виде суммы $k+1$ дроби вида $\frac{1}{n}$. Значит, всего во всех представлениях задействовано конечное число дробей вида $\frac{1}{n}$.

Пусть Петя тогда запишет на доску ту дробь, которая не задействована ни в одном из представлений. Тогда Вася точно не сможет написать $k$ дробей так, чтобы сумма стала натуральной.

**7. [12]** *Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где $n$ — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от $n$.*

*(Николай Белухов)*

Сориентируем доску так, чтобы у неё было 1000 столбцов и $n$ строк, а жук сидел в нижнем левом углу. Покрасим клетки в шахматном порядке, причём клетку жука сделаем белой. Занумеруем столбцы числами от 1 до 1000 слева направо, а строки числами от 1 до $n$ снизу вверх.

Рассмотрим некоторый путь жука из клетки $(1, 1)$ в клетку $(1000, n)$. Из каждой клетки пути нарисуем стрелку в следующую клетку. Тогда из каждой белой клетки пути стрелка ведёт в чёрную.

Пусть $i$ — чётное число, причём $1000 \leq i \leq n - 1003$. Между строками $i$ и $i + 1$ проведём горизонтальную прямую $\ell$.

Ниже прямой $\ell$ количество белых клеток в пути превосходит количество чёрных не меньше чем на 1000, так как 1000 чёрных клеток в нижних строках находятся под боем слона. Поэтому не меньше 1000 стрелок идут из белых клеток ниже $\ell$ в чёрные клетки выше $\ell$. Но так может проходить лишь стрелка из клетки в строке $i-1$ или $i$. А поскольку там всего 1000 белых клеток, в каждой из них начинается стрелка, идущая в чёрную клетку строки $i+1$ или $i+2$.

Стрелка из клетки $(1, i-1)$ может идти только в $(2, i+1)$. Тогда стрелка из $(3, i-1)$ может идти только в $(4, i+1)$. Последовательно рассматривая клетки $(5, i-1)$, $(7, i-1)$, $\ldots$, $(999, i-1)$, $(1000, i)$, $(998, i)$, $\ldots$, $(2, i)$, видим, что все 1000 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 1).

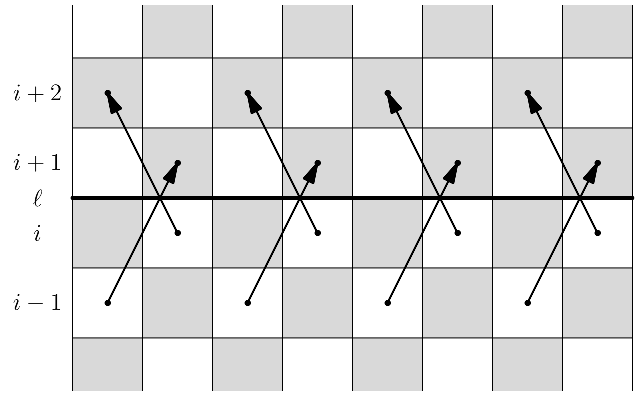



Рис. 1.

Аналогичное верно для $i+2$ и, значит, для белых клеток в строках $i+1$ и $i+2$. Поэтому если жук пришёл в белую клетку выше $\ell$, то он уже никогда не вернётся в клетку ниже $\ell$. Действительно, пусть жук впервые пересекает $\ell$ сверху вниз после того, как он побывал в белой клетке выше $\ell$. Перед пересечением этой прямой жук находился в строке $i+1$ или $i+2$. Если жук был в белой клетке, то он пошёл бы вверх. А если жук был в чёрной клетке, то он пришёл в неё из клетки ниже $\ell$ — значит, он уже спускался ниже $\ell$, побывав в белой клетке выше $\ell$. Получили противоречие.

Среди стрелок из белых клеток строк $i-1$ и $i$ рассмотрим пройденную последней. Так как до этого жук не побывал в белой клетке выше $\ell$, то из концов остальных таких стрелок он спускался ниже $\ell$. Таким образом, лишь из одной чёрной клетки в строках $i+1$ и $i+2$ стрелка ведёт в белую клетку выше $\ell$.

Поскольку стрелка из $(1, i+2)$ не может вести в белую клетку ниже $\ell$, стрелки из всех остальных чёрных клеток в строках $i+1$ и $i+2$ должны вести в белые клетки ниже $\ell$. Последовательно рассматривая клетки $(3, i+2)$, $(5, i+2)$, $\ldots$, $(999, i+2)$, $(1000, i+1)$, $(998, i+1)$, $\ldots$, $(2, i+1)$, видим, что все 999 стрелок в действительности определены однозначно (рис. 2).

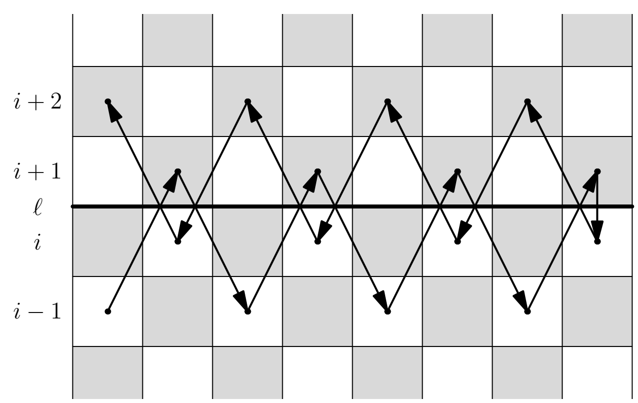



Рис. 2.

Аналогичное рассуждение для всех чётных значений $i$ между 1000 и $n-1003$ показывает, что средняя часть пути жука определена однозначно и при росте $n$ продолжается в виде пружины (рис. 3).

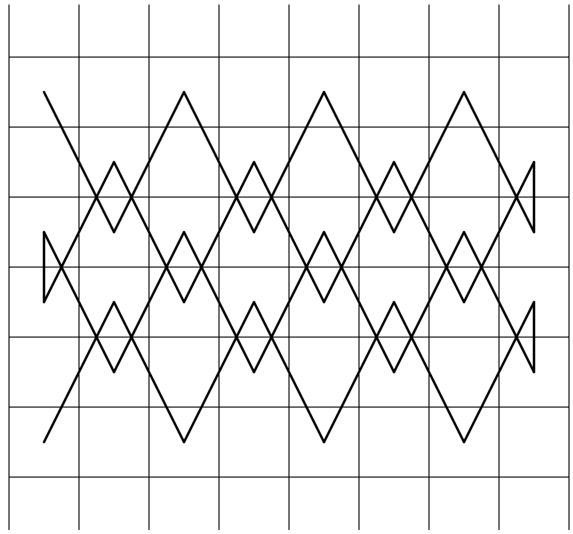


Рис. 3.

Следовательно, количество возможных путей не зависит от $n$.

*Замечание.* Конструкция на рисунке 4 показывает, что рассматриваемые пути действительно существуют.

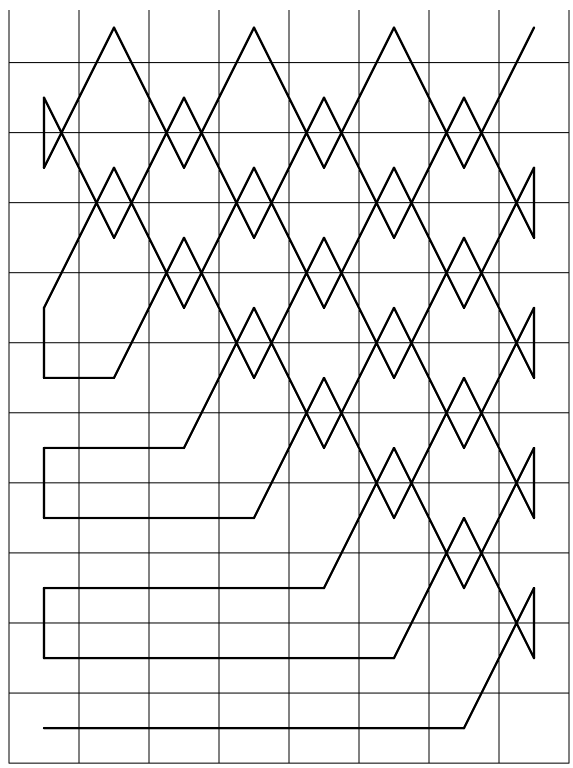


Рис. 4.