8 – 9 класс

Предварительные решения

заданий 8-9 класса 42-го Турнира Городов (осень базовый тур)

№ 1. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки?

Ответ: **нет!**

Решение. Заметим, что

1) если есть один прямоугольный треугольник с вершинами в отмеченных точках, то одна из его сторон – гипотенуза является диаметром окружности; но тогда 98 отмеченных точек, не совпадающих с концами этого диаметра (и гипотенузы), образуют 98 прямоугольных треугольников;

2) если есть еще один прямоугольный треугольник (не совпадающий с указанными в предыдущем пункте), то его гипотенуза (и диаметр окружности) тоже вместе с оставшимися 98 отмеченными точками образуют прямоугольные треугольники, причем никакие два треугольника из всех описанных в пунктах 1) и 2) не совпадают.

И так далее.

Из всего вышесказанного следует, что общее число прямоугольных треугольников с вершинами в отмеченных точках делится нацело на 98 и не может быть равно 1000.

№ 2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что 2 а) каждый побывал в полуфинале более одного раза; 3 б) каждый побывал в финале.

Доказательство.

Заметим, что каждый из теннисистов за эти годы сыграл ровно 7 матчей, а всего они сыграли $8\times7:2 = 28$ матчей. В то же время в течение розыгрыша одного кубка играется ровно 7 матчей – 4 в четвертьфиналах (и в них играют все 8 теннисистов), 2 в полуфиналах и 1 в финале.

Таким образом, все описанное в задаче произошло в течение 4 лет!

а) В четвертьфиналах все теннисисты сыграли по 4 игры, если кто-то дошел в некоторый год до финала – то у него уже есть 6 матчей, но всего он сыграл 7, значит, еще по крайней мере один раз, он должен был выйти в полуфинал.

б) В каждом финале играют по два игрока, т.е. в четырех финалах – должно быть 8 игроков. Если кто-то из них дважды играл в финале, то у него согласно пункту а) будет минимум 8 сыгранных матчей (т.е. больше 7), значит, каждый играл в финале ровно один раз, а, следовательно, все семеро побыали финале и ровно по одному разу!

№ 3. В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

Ответ: **при $n \neq 4k$.**

Решение. Используя идею анализа выигрышных и проигрышных позиций, простым перебором можно получить следующие первые значения выигрышных для начинающего позиций (ясно, что его стратегия будет состоять в передаче хода второму игроку – оставляя ему проигрышную позицию):

Значение n →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Выигрышная позиция	+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+	+	+		+
Проигрышная позиция				–				–				–				–				–	

Отсюда гипотеза: все проигрышные позиции – это значения $n = 4k$. Докажем эту гипотезу.

1) Покажем, что из $n \neq 4k$. всегда можно передать ход **в меньшее значение n, кратное 4**. Действительно, если $n = 4k+ 1$ или $n = 4k+ 2$, то забирая в этих случаях 1 или 2 камня соответственно, получаем $n = 4k$. Если же $n = 4k+ 3$, то n – нечетное, т.е. все его простые делители нечетные, причем обязательно имеется простой делитель вида $4m+ 3$ (если это не так, т.е. все простые делители вида $4m + 1$, то и их произведение равно $4k+ 1$). Но тогда, забирая из кучки число корней, равное $4m+ 3$, оставим в кучке кратное 4 число камней.
2) Покажем, что при $n = 4k$ любой ход ведет в выигрышную позицию. Действительно, забирая из кучки ровно 2 камня мы получим $n = 4k+ 2$ (а это выигрышная позиция); все другие ходы состоят в извлечение из кучки нечетного числа камней, т.е. опять получается перевод кучки в выигрышную позицию.

Доказательство завершено.

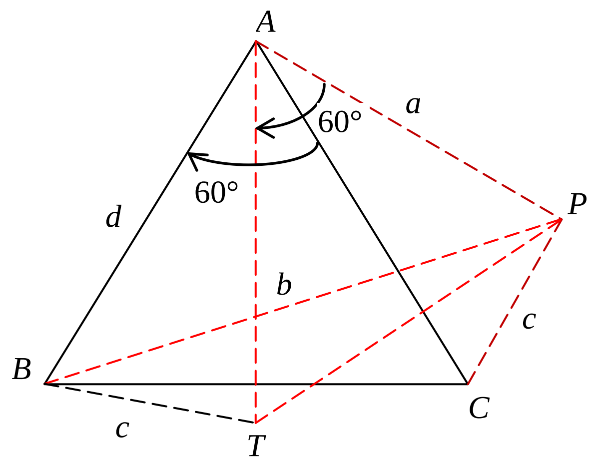
№ 4. Дан равносторонний треугольник со стороной d и точка P , расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдётся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.

Доказательство.

Пусть дан равносторонний треугольник ABC со стороной длины d и точка P такая, что длины отрезков PA, PB и PC равны соответственно a, b и c (см. рис.). Заметим, что для вершины В уже выполняется: $BA = d$ и $BP = b$, осталось «достроить» на отрезке AP равносторонний треугольник APT (как раз со стороной длины a) так, чтобы длина отрезка $BT = c$. Тогда точка B и окажется искомой точкой Q.

Но для достижения этого требования достаточно повернуть треугольник CAP на 60° вокруг точки А (см. изображение «достроенного» треугольника на рис.). Заметим, что на данном рисунке поворот осуществляется по часовой стрелке; возможны исходные расположения треугольника и точки P такие, что поворот нужно будет делать против часовой стрелки.

Замечание. Отдельно нужно убедиться в возможности подобного построения для случаев, когда точка P находится внутри треугольника ABC, а также вне углов ABC, BAC и CAB (предоставляем читателям сделать это самостоятельно).



№ 5. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ... , 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

Решение. Алгоритмов действий может быть несколько. Опишем один из них.

Будем обозначать слонов по порядку, указанному в условии: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, причем, начиная с 3-го, и каждый следующий за ним, имеет массу, равную сумме двух предыдущих. Для первого взвешивания возьмем на одну чашу весов слонов с номерами 2, 3 и 8, а на вторую – 4, 6 и 7. Понятно, что если среди нет похудевшего слона, то чаши уравновесятся, а если есть, то чаша, на которой окажется «худой» слон (будем его далее так называть) будет легче. Запишем это в виде такой схемы:

<u>1-е взвешивание</u>: на весах располагаются слоны с номерами: **I чаша - (2, 3, 8) ** II чаша - (4, 6, 7)**,

Возможные варианты: **1.1. I чаша - (2, 3, 8) < II чаша - (4, 6, 7)**,

1.2. I чаша - (2, 3, 8) > II чаша - (4, 6, 7),

1.3. I чаша - (2, 3, 8) = II чаша - (4, 6, 7).

Рассмотрим эти варианты по очереди.

1.1. В этом случае «худой» слон точно есть, и его номер 2, 3 или 8.
теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (1, 2) ** II чаша - (3),

- если чаши уравновесятся, то 1,2 и 3 – нормальные слоны, а худой – 8-й,
- если I чаша – легче, то худой слон – 2-й,
- если I чаша – тяжелее, то худой слон – 3-й.

1.2. В этом случае «худой» слон точно есть, и его номер 4, 6 или 7.
теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (4, 5) ** II чаша - (6),

- если чаши уравновесятся, то 4, 5 и 6 – нормальные слоны, а худой – 7-й,
- если I чаша – легче, то худой слон – 4-й,
- если I чаша – тяжелее, то худой слон – 6-й.

1.3. В этом неизвестно есть ли «худой» слон, и если все же есть, то его номер 1 или 5.
теперь для **2-го взвешивания** расположим слонов на чашах весов так:

I чаша - (1, 2, 4) ** II чаша - (5).

Заметим, что если на чашах весов нормальные слоны, то чаши уравновесятся, т.е. 1 и 5 – не худые, и слух был неверный.

- если же I чаша – легче, то худой слон – 1-й,
- если же I чаша – тяжелее, то худой слон – 5-й.

Решение закончено!