• *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*

• *баллы за пункты одной задачи суммируются*

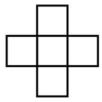
Баллы ***Задачи***

1. Назовем натуральное число p-совершенным, если само это число, сумма его цифр и произведение его цифр делятся на p.

1 а) При каком наибольшем простом p существует p-совершенное число, не содержащее цифры 0 в своей десятичной записи?

4 б) Найдите наибольшее четырехзначное 7-совершенное число.

2. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому, как показано на рисунке).



2 а) Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать восемь таких крестов? Резать разрешается только по линиям шахматной доски.

4 б) Ответьте на тот же вопрос для девяти крестов.

6 3. Паша и Саша играют в такую игру: они по очереди закрашивают клетки доски 7×8. Паша ходит первым и каждым своим ходом должен закрасить две клетки, которые имеют хотя бы одну общую вершину. Саша каждым своим ходом закрашивает любую клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как ему надо играть?

7 4. На шахматной доске размером 20×20 расставили 20 ферзей, которые не бьют друг друга. Может ли получиться так, что в одном из угловых квадратов 10×10 не стоит ни одного ферзя?

8 5. Известно, что число 2^{2020} записывается 609 цифрами и начинается цифрой 1. Какое количество чисел из набора $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{2020}$ начинается цифрой 1?

10 6. Из 10 одинаковых по виду монет некоторые золотые (более тяжелые), а некоторые – из латуни (более легкие). Как с помощью шести взвешиваний на чашечных весах без гирь определить количество золотых монет?

Все золотые монеты между собой весят одинаково, и все латунные монеты тоже весят одинаково.

7. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было

5 а) хотя бы сто чисел 5?

7 б) хотя бы сто чисел 10?

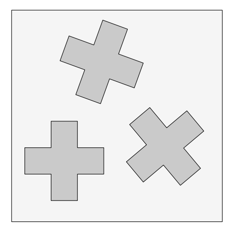
СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?
7	2. Назовём пару различных натуральных чисел *удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) — натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.)
	3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было
3	а) хотя бы сто чисел 5?
4	б) хотя бы сто чисел 10?
7	4. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов? (На рисунке показано, как можно вырезать три креста.)
8	5. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?
10	6. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?
	7. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что
6	а) один из углов этого четырехугольника не больше $60°$;
6	б) один из углов этого четырехугольника не меньше $120°$.



СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2020 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Даны n натуральных чисел. Боря для каждой пары этих чисел записал на чёрную доску их среднее арифметическое, а на белую доску — их среднее геометрическое, и для каждой пары хотя бы одно из этих двух средних было целым. Докажите, что хотя бы на одной из досок все числа целые.
5	2. Барон Мюнхгаузен придумал теорему: если многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n натуральных корней, то на плоскости найдутся a прямых, у которых ровно b точек пересечения друг с другом. Не ошибается ли барон?
6	3. Окружности α и β с центрами в точках A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Отрезок AB пересекает окружности α и β в точках K и L соответственно. Луч DK вторично пересекает окружность β в точке N, а луч DL вторично пересекает окружность α в точке M. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника $KLMN$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.
7	4. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?
7	5. Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 100 прямоугольников, которые все ему подобны, но среди которых нет двух одинаковых?
10	6. Петя и Вася по очереди пишут на доску дроби вида $1/n$, где n — натуральное, начинает Петя. Петя за ход пишет только одну дробь, а Вася за первый ход — одну, за второй ход — две, и так каждым следующим ходом на одну дробь больше. Вася хочет, чтобы после какого-то хода сумма всех дробей на доске была натуральным числом. Сможет ли Петя помешать ему?
12	7. Белая фигура «жук» стоит в угловой клетке доски $1000 \times n$, где n — нечётное натуральное число, большее 2020. В двух ближайших к ней углах доски стоят два чёрных шахматных слона. При каждом ходе жук или переходит на клетку, соседнюю по стороне, или ходит как шахматный конь. Жук хочет достичь противоположного угла доски, не проходя через клетки, занятые или атакованные слоном, и побывав на каждой из остальных клеток ровно по одному разу. Покажите, что количество путей, по которым может пройти жук, не зависит от n.