Весенний тур. СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 кл., базовый вариант 14 *марта* 2021 *г.*

• *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются*

Бал-лы	***Задачи***
1 1 2	1. Имеется прямоугольный стол, разделённый на ячейки, и большое количество одинаковых монет. Два игрока кладут по очереди по одной монете в свободную ячейку стола или две монеты в две свободные соседние по стороне ячейки (по одной монете в каждую ячейку) до тех пор, пока это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре (опишите стратегию), если размеры стола: а) 5×5; б) 4×5; в) n×m?
4	2. Можно ли расставить на поле 4×4 шахматного короля, две ладьи и два слона так, чтобы фигуры не били друг друга? (Все фигуры бьют по шахматным правилам.)
5	3. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?
5	4. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 101, 102, 104, 105 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Каждое следующее взвешивание выбирается по результатам всех предыдущих.)
6	5. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, в также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

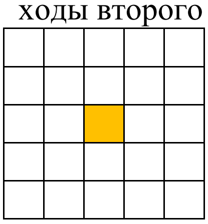
Ответы и решения

№ 1. Имеется прямоугольный стол, разделённый на ячейки и большое количество одинаковых монет. Двое играющих кладут по очереди по одной монете в свободную ячейку стола (по одной монете в каждую ячейку) или две монеты в соседние по стороне ячейки до тех пор, пока это возможно. Играющий, положивший на стол монету последним, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре (опишите стратегию), если

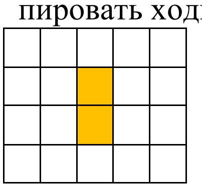
а) стол размера 4×5; б) стол размера 5×5; в) стол размера n×m;

Ответы см. в решении. Решение:

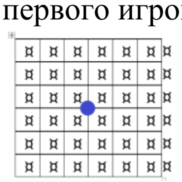
а) Выиграет первый. Первым ходом он положит монет в центральную ячейку, а затем будет копировать ходы второго игрока относительно этой центральной клетки.



б) Выиграет первый. Первым ходом он положит две монеты в две центральные ячейки, а затем будет копировать ходы второго игрока относительно этих двух центральных клеток



Дополнительно, если, например, доска 6×6: выиграет второй. Своим ходом он будет копировать ходы первого игрока относительно центра доски (не клетки, а точки)



г) Если доска размера n×m и

- хотя бы одно из значений m или n нечетное, то выиграет первый. Стратегия как в пунктах а) или б),

- если оба значения **m и n нечетное, то выиграет второй.** Стратегия как в дополнительном пункте.

№ 2. Можно ли расставить на поле 4×4 шахматного короля, две ладьи и два слона так, чтобы фигуры не били друг друга? (Все фигуры бьют по шахматным правилам.)

Ответ: Да, см. рис.

	л		
			л
с			
с		**к**	

Здесь, **К** – король, **С** – слон, **Л** – ладья.

№ 3. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Ответ: Да.
Решение. Вот пример: возьмем первые 9 натуральных чисел и их произведение 1×2×3×4×5×6×7×8×9 = A. Ясно, что A кратно 9 (делится нацело на 9). Пусть B = A:9 = 1×2×3×4×5×6×7×8, тогда девять чисел: B–4, B–3, B–2, B–1, B, B+1, B+2, B+3, B+4.
Дополнительно заметим, что подобное рассуждение годится для произведения любых 9 подряд идущих натуральных чисел и, более того, для любого нечетного числа подряд идущих натуральных чисел.

Что касается этой задачи **в случае четного числа n** подряд идущих чисел, то **ответ будет отрицательный**, ибо произведение таких чисел делится нацело на четное число n (далее удобно будет записать n = 2m), а сумма любых 2m подряд идущих натуральных чисел (обозначим их: x–m+1, x–m+2, …, x, x+1, …, x+m), равна 2mx+m при делении на 2m дает остаток m.

№ 4. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 101, 102, 104, 105 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантировано определить, где какая гиря? (Каждое следующее взвешивание выбирается по результатам всех предыдущих.)

Ответ: Да.
Решение. Опишем алгоритм. Для удобства (не теряя общности) будем рассматривать массы монет, равные 1, 2, 4 и 5 грамм. Обозначим далее монеты через А, В, С и Д (веса их пока неизвестны).

1-е взвешивание. На левую чашу положим А и В, на правую – С и Д. Возможны два варианта – либо а) весы оказались в равновесии, б) одна из чаш (не теряя общности, скажем, что правая) перевесила. Рассмотрим эти варианты по очереди.

а) Равенство А+В = С+Д возможно лишь в случае 2+4 = 1+5. Далее вторым и третьим взвешиванием определим более тяжелую монету на обеих чашах весов (т.е. взвесим А и В, а также С и Д). Ясно, что более легкие монеты – это 1 г и 2г. Четвертым взвешиванием, определяем, какая из них легче, т.е. какая – 1 г и какая 2 г. В паре с этими монетами после первого взвешивания были 5 г и 4 г.

б) Пусть теперь А+В < С+Д. Это лишь в случае, если монета в 5 г лежит справа, а монета в 1 г слева (т.е. реально здесь возможны только такие варианты 1+2 < 4+5 или 1+4 < 2+5). Далее вторым и третьим взвешиванием определим более легкую монету (т.е. 1 г) слева и более тяжелую монету (т.е. 5 г) справа (т.е. вновь взвесим А и В, а также С и Д). После этого мы знаем монеты в 1 г и 5 г. Четвертым взвешиванием определяем, какая из оставшихся монет весит 2 г и какая – 4 г.

№ 5. В треугольнике *ABC* провели высоты *AX* и *BZ*, в также биссектрисы *AY* и *BT*. Известно, что углы *XAY* и *ZBT* равны. Обязательно ли треугольник *ABC* равнобедренный?

Ответ: Нет, необязательно.
Решение. Пример – треугольник, в котором $\angle C = 60°$, $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, см. рис. При анализе рисунка и возможных ситуаций (поиске конструкции) важно обратить внимание, что на рисунке точка T (основание биссектрисы) лежит ближе к вершине A, чем точка Z (основание высоты), ибо c = AB > a = BC, а для точек X и Y – все наоборот. Осталось только аккуратно посчитать углы.

1). a < c < b
2). $\angle CBZ = 30° = \angle CAX$
3). $\angle CAY = 25°$; $\angle CAT = 35°$,
4). $\angle XAY = \angle XBT = 5°$.
Но треугольник ABC не является равнобедренным.