- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

№ 1. Найдите все пары однозначных натуральных чисел (x, y) такие, что выполняется неравенство: $\frac{3}{4} < \frac{x}{y} < \frac{8}{9}$.

Ответ: (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (7,9).

Решение. Поскольку все числа натуральные, то исходные неравенства равносильны неравенствам $27y < 36x < 32y$. Рассматривая различные значения y от 1 до 9, находим 5 пар: (4,5), (5,6), (6,7), (7,8) и (7, 9).

№ 2. Сломанный разменный аппарат умеет выполнять две операции: обменять две монеты на пять и обменивать пять монет на две. У Пети есть 100 монет. Сможет ли он обменять свои монеты на 1000 монет, отдав разменному аппарату

а) ровно 2020 монет?

б) ровно 2021 монету?

Ответ: а) нет, б) да.

Решение. Заметим, что при выполнении первой операции число монет увеличивается на 3 (и поэтому будем называть ее (+3) операцией), а при выполнении второй операции – уменьшается на 3 (будем называть ее (-3) операцией).

Ясно, что для получения 1000 монет из 100 потребуется на 300 операций типа (+3) больше, чем операций типа (-3), причем в любом порядке. Пусть мы сделаем K операций типа (-3) и (K+300) операций типа (+3). При этом для ввода в аппарат будет задействовано $5\times K + 2\times(K + 300)$ монет, т.е. $7\times K + 600$.

Таким образом, для пункта а) имеем равенство $7\times K + 600 = 2020$ или $7\times K = 1420$, что невозможно, ибо K – натуральное число, а для пункта б) имеем $7\times K = 1421$, т.е. $K = 203$, причем повторим, что порядок выполнения операций значений не имеет.

№ 3. Найдите все пары натуральных чисел A и B, каждое из которых меньше 100, для которых выполняется равенство:

$$10\cdot A = B^3 - B.$$

Ответ: (6,4), (12, 5), (21, 6), (72, 9), (99, 10).

Решение. Имеем необычное диофантово уравнение, в решении которого используются

- как оценка: при $B > 10$ решений нет, а при B = 10 получаем A = 99,

- так и, для случая $B < 10$, оригинальное преобразование уравнения к виду $10\cdot A + B = B^3$. По сути это означает: найти все такие однозначные числа B, кубы которых заканчиваются на ту же цифру B), таких чисел четыре: $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $9^3 = 729$).

№ 4. Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а семизначное число B – только тройками и четверками. Может ли произведение A×B записываться одними двойками?

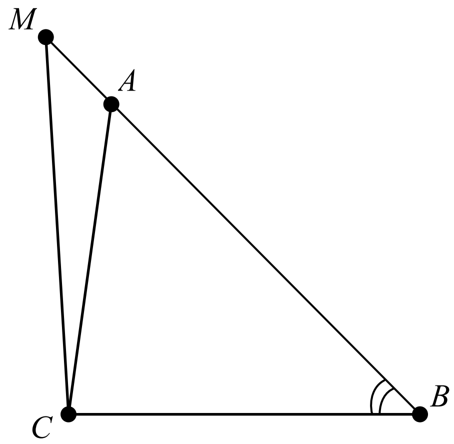
Ответ: нет.

Решение основано на оценке произведения A×B, которое не меньше чем 22222×3333333 = 74 073 325 926, и не больше чем 33333×4444444 = 148 146 651 852. Т.е. первая цифра произведения точно не 2.

№ 5. В треугольниках ABC и MPK выполнены равенства $CB = KP$, $AC + AB = MK + MP$ и $\angle ABC = \angle MPK$. Обязательно ли треугольники ABC и MPK равны?

Ответ: да, ОБЯЗАТЕЛЬНО.

Доказательство.



Совместим равные стороны треугольников CB и KP (на рис. это отрезок CB) и углы ABC и MKP = MBC (см. соответствие точек и отрезков на рисунке). Если предположить, что точки A и M не совпадают (на рис. показан случай MB = MP > AB, случай MB < AB аналогичен), то согласно условию получаем:

$$AC + AB = MK + MP = MC + MB,$$

или

$$AC = MC + (MB - AB) = MC + MA,$$

но тогда для треугольника AMC не выполняется неравенство треугольника. Полученное противоречие доказывает утверждение.

№ 6. Егор записал натуральные числа от 1 до 500 по кругу. Затем пришёл Миша и начал зачёркивать все числа, начиная с 1 через каждые 14 чисел (т.е. зачёркиваются числа 1, 15, 29, …; при этом, когда Миша отсчитывает четырнадцатое число, он учитывает и числа, зачеркнутые ранее). Этот процесс Миша продолжал, пока, сделав некоторое число оборотов, не вернулся к уже зачёркнутой 1. Сколько после этого чисел осталось не зачёркнутыми?

Ответ: 250.

Доказательство. Несложно заметить, что n-е зачеркнутое число будет числом вида $1+14(n-1)=14n-13$. Смысл задачи не изменится, если считать, что после первого оборота в точке окружности, где стояла 1, стоит число 501; после второго оборота – 1001 и т.д. Поэтому процесс зачёркиваний прекратится, когда в последовательности 501, 1001, 1501, … мы впервые встретим число вида $14n-13$. Пусть это произойдет после k оборотов. Тогда $14n-13=500k+1$. Или $14(n-1)=500k$, $7(n-1)=250k$. Откуда следует, что k делится на 7, а так как нас интересует наименьшее число обходов по окружности, то $k = 7$. Значит $n=251$. Осталось заметить, что при таком подсчёте мы 1 зачеркнули дважды: как 1 и как 3501. Значит число зачёркиваний 250. При этом остальные числа были зачёркнуты по одному разу. Следовательно, не зачёркнутых чисел 500 – 250 = 250.

№ 7. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых меньше 1000, можно выписать так, чтобы среди них не оказалось числа, делящегося на сумму своих цифр?

Ответ: 17.

Решение. Сложность этой задачи в том, что школьникам нужно одновременно и успешно (!) разрешить три взаимосвязанные проблемы: 1) понять или почувствовать (как-то «нащупать») то максимальное количество подряд идущих чисел, о которых идет речь в условии, 2) доказать, что действительно большего количества не может быть, 3) построить соответствующий пример.

Разумнее всего,видимо, начинать с первой проблемы, ибо здесь есть мотив: делимость числа на сумму его цифр лучше всего связана с признаком делимости на 9 (и, возможно, 18 и 27, ибо речь идет о числах меньших 1000). Делимость на 27 не понадобится, ибо сумма цифр трехзначных чисел меньше 27, за исключением одного числа 999, но это число как раз делится на 27.

А вот среди любых 18 подряд идущих чисел есть ровно 2, кратных 9. Одно из них четное, значит, оно делится на 18. Сумма цифр в этом числе либо 9, либо 18, значит, это число делится на сумму своих цифр. Таким образом, возможный максимум – 17 чисел.

Осталось построить примеры, причем поиск вести в наборах чисел между двумя соседними числами, кратными 18. Вот два из подходящих набора чисел: 559, 560, 561, ..., 575 или 937, 938, …, 953. Возможны и другие наборы.