42-й Международный математический Турнир городов
Весенний тур, 2020/21 учебный год

Предварительные решения задач

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 [4]. Может ли произведение каких-то 9 последовательных натуральных чисел равняться сумме (может быть, других) 9 последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ: может. **Решение**. Например, $(8! - 4) + (8! - 3) + \ldots + 8! + \ldots + (8! + 4) = 9\cdot 8! = 9!$.
Замечание. См. также задачу 3 старших классов.

2 [4]. В треугольнике ABC провели высоты AX и BZ, а также биссектрисы AY и BT. Известно, что углы XAY и ZBT равны. Обязательно ли треугольник ABC равнобедренный?

Жюри

Ответ: не обязательно. **Решение**. Например, нетрудно проверить, что в треугольнике с углами $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ оба указанных угла равны 10°, а в треугольнике с углами $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ оба указанных угла равны 15°.
Замечание. Годится любой треугольник с углом C, равным 60°.

3 [4]. У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1001, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

Жюри

Ответ: может.
Решение 1. Первые три взвешивания такие: разбиваем гири на две пары способом, который ещё не встречался, и сравниваем их. Разных способов как раз три. Мы получим равенство для пар {1001, 1005} и {1002, 1004}. При этом только гиря 1001 в двух других взвешиваниях была в «лёгкой» паре и только гиря 1005 в двух других взвешиваниях была в «тяжёлой» паре – так находим их. Оставшиеся две гири 1002 и 1004 различаем четвёртым взвешиванием.
Решение 2. Сначала положим на чаши по две гири.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда гири разбиваются на две пары: *лёгкую* и *тяжёлую*. Есть два варианта: лёгкая пара – гири {1001, 1002}, тяжелая – {1004, 1005} или лёгкая пара – {1001, 1004}, тяжёлая – {1002, 1005}. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более тяжелую гирю лёгкой пары с более лёгкой гирей тяжёлой пары, узнаем, какой из вариантов имеет место.

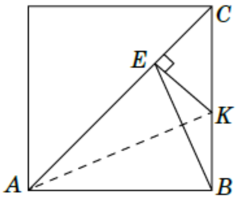
2) Весы в равновесии. Тогда гири разбиваются на две пары равного веса: {1001, 1005} и {1002, 1004}. Вторым и третьим взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием, сравнив более лёгкие гири пар, узнаём, какая пара какая.

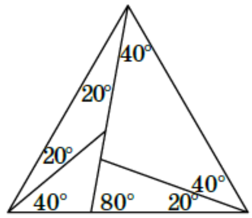
4. а) [3] Можно ли разрезать квадрат на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?
б) [3] А можно ли разрезать равносторонний треугольник на 4 равнобедренных треугольника, среди которых нет равных?

Владимир Расторгуев

Ответы: можно в обоих пунктах.

Решение. См. рисунки. На левом рисунке сначала проводим биссектрису AK угла BAC, а затем отражаем точку B относительно AK и получаем точку E.

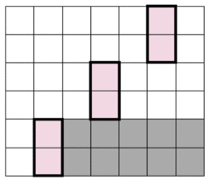


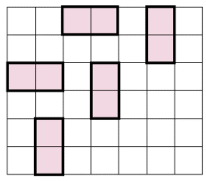


5. На клетчатой доске лежат доминошки, не касаясь даже углами. Каждая доминошка занимает две соседние (по стороне) клетки доски. Нижняя левая и правая верхняя клетки доски свободны. Всегда ли можно пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю, делая ходы только вверх и вправо на соседние по стороне клетки и не наступая на доминошки, если доска имеет размеры
а) [2] 100×101 клеток;
б) [4] 100×100 клеток?

Николай Чернятьев

а) **Ответ:** не всегда.





Решение. На рисунке справа вверху показано расположение доминошек на доске 6×7, которое не позволяет пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю. Действительно, попасть в (серую) область правее самой нижней доминошки нельзя, поскольку сначала мы должны подняться выше первой доминошки, и тогда мы уже выше серой полосы (а вниз ходить нельзя). Далее, нельзя попасть в аналогичную серую область правее следующей доминошки и т.д. Эта конструкция обобщается на любую доску размера $2n×(2n+1)$.

Замечание. Для упрощения доказательства можно было бы добавить ещё горизонтальные доминошки над вертикальными, чтобы оставался единственный путь по доске, упирающийся в итоге в последнюю вертикальную доминошку (рисунок справа внизу).

б) **Ответ:** всегда. **Решение**. Начальная и конечная клетки лежат на главной диагонали доски и имеют «координаты» $(1, 1)$ и $(100, 100)$. Докажем, что в любую *свободную* клетку этой диагонали можно попасть.

Действительно, пусть мы дошли до клетки (n, n). Если клетка $(n + 1, n + 1)$ свободна, то хоть одна из клеток $(n, n + 1)$ и $(n + 1, n)$ не занята и через неё можно пройти на клетку $(n + 1, n + 1)$.

Если же клетка $(n + 1, n + 1)$ занята, то из её соседей занята ровно одна клетка, причём по стороне, поэтому один из двух путей из (n, n) в $(n + 2, n + 2)$ не закрыт.

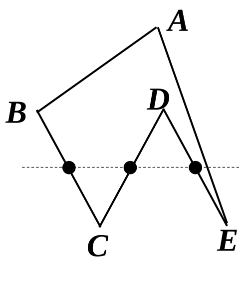
Базовый вариант, 10 – 11 классы

1. **а**) [2] Выпуклый пятиугольник разбили непересекающимися диагоналями на три треугольника. Могут ли точки пересечения медиан этих треугольников лежать на одной прямой?

б) [2] Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.

Александр Грибалко

Ответы: а) не могут; **б**) могут.



Решение. Ясно, что проведено ровно две диагонали, причём они выходят из одной вершины (пусть из A). Тогда указанные точки пересечения медиан получаются гомотетией с центром A и коэффициентом $^2/_3$ из середин сторон BC, CD и DE.

а) Эти середины сторон не могут лежать на одной прямой, так как прямая, не содержащая сторону выпуклого многоугольника, может пересечь его границу не более чем в двух точках.

б) Эти середины сторон могут лежать на одной прямой, как показано на рисунке справа.

2. **а**) [2] У Тани есть 4 одинаковые с виду гири, массы которых равны 1000, 1002, 1004 и 1005 г (неизвестно, где какая), и чашечные весы (показывающие, какая из двух чаш перевесила или что имеет место равенство). Может ли Таня за 4 взвешивания гарантированно определить, где какая гиря? (Следующее взвешивание выбирается по результатам прошедших.)

б) [2] Тот же вопрос, если у весов левая чашка на 1 г легче правой, так что весы показывают равенство, если масса на левой чашке на 1 г больше, чем на правой.

Алексей Толпыго

а) **Ответ**. Не может. **Решение**. Как бы Таня ни помещала гири на весы, равновесия они никогда не покажут. Поэтому каждое взвешивание делит множество *подозрительных* перестановок не более чем на две части. Вначале было 24 подозрительных перестановки, после первого взвешивания при «неудачном» исходе их останется не меньше 12, после второго – не меньше 6, …, после четвёртого – не меньше 2.

б) **Ответ**. Может. **Решение 1**. Сначала положим на чаши по две гири. В результате гири разбиваются на две пары: *лёгкую* и *тяжёлую* (если весы показали равновесие, то, как мы знаем, более тяжёлая группа – на левой чаше). Есть три варианта: лёгкая пара – гири {1000, 1002}, тяжёлая – {1004, 1005}; лёгкая пара – {1000, 1004}, тяжёлая – {1002, 1005}; лёгкая пара – {1000, 1005}, тяжелая – {1002, 1004}. Следующими двумя взвешиваниями упорядочим гири по весу в каждой паре. Четвёртым взвешиванием сравним более тяжёлые гири обеих пар, положив на левую чашу гирю *из тяжёлой пары*. В первом варианте перевесит левая чаша, в третьем – правая, а во втором весы покажут равновесие (на левой чаша 1005, на правой – 1004).

Решение 2. Положим гирю A на левую чашу, а гирю B – на правую. В случае «равновесия» A весит 1005 г, B – 1004 г, а веса гирь C и D определяются вторым взвешиванием.

В противном случае гиря на перевесившей чаше *тяжёлая* – весит 1004 или 1005 г – (можно считать, что это A), а другая – *лёгкая*. Тогда положим A на левую чашу, а C – на правую. В случае «равновесия» A весит 1005 г, C – 1004 г, а веса гирь B и D определяются третьим взвешиванием.

Если перевесит правая чаша, то A весит 1004 г, C – 1005 г, а веса гирь B и D определяются третьим взвешиванием. Если перевесит левая чаша, гиря C лёгкая, как и B. Их веса определяются третьим взвешиванием, а веса A и D – четвёртым.

3. [5] При каких натуральных n найдутся n последовательных натуральных чисел, произведение которых равно сумме (может быть, других) n последовательных натуральных чисел?

Борис Френкин

Ответ. При нечётных n. **Решение**. Произведение n последовательных целых чисел делится на n, значит, и равная ей сумма целых чисел делится на n. Поэтому среднее арифметическое этих чисел – целое число. Значит, n нечётно. Вот пример для $n = 2m + 1$:

$$((2m)! - m) + ((2m)! - m + 1) + \ldots + ((2m)! + m) = (2m + 1)\cdot(2m)! = n!.$$

4. [5] Как известно, квадратное уравнение имеет не более двух корней. А может ли уравнение $[x^2] + px + q = 0$ при $p \neq 0$ иметь более 100 корней? ($[x^2]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x^2.)

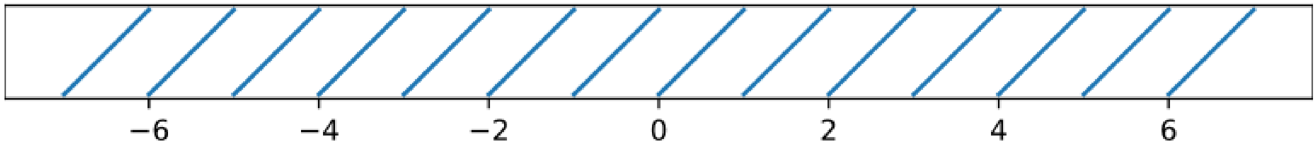
Алексей Толпыго

Ответ. Может. **Решение**. Рассмотрим, например, уравнение $[x^2] - 100x + 2500 = 0$. Оно имеет 199 корней вида $50 + \frac{k}{100}$ ($k = -99, -98, \ldots, 99$). Действительно,

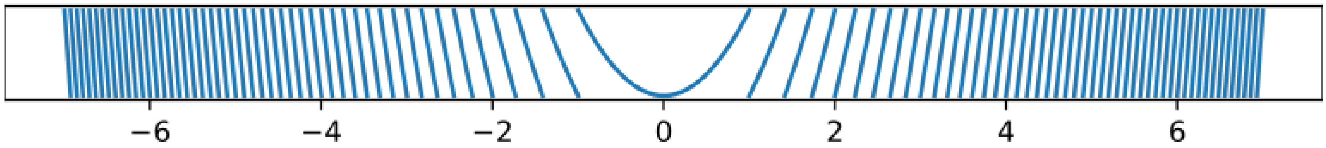
$$\left[\left(50 + \frac{k}{100}\right)^2\right] = \left[2500 + k + \left(\frac{k}{100}\right)^2\right] = 2500 + k = 100\left(50 + \frac{k}{100}\right) - 2500.$$

Идеология. Прямая $y = 100x - 2500$ касается параболы $y = x^2$ в точке (50, 2500).

Замечание. Поясним неформально, как можно было придумать решение задачи. Поскольку $[x^2] = x^2 - \{x^2\}$, исходное уравнение можно переписать в виде $x^2 + px + q = \{x^2\}$. Будем решать его графически: искать пересечения графиков параболы и дробной части квадрата. График дробной части $y = \{x\}$ представляет собой ряд равномерно идущих наклонных полуинтервалов:



Поэтому график $y = \{x^2\}$ состоит из искривлённых полуинтервалов, которые «чем дальше от нуля, тем идут всё чаще»:

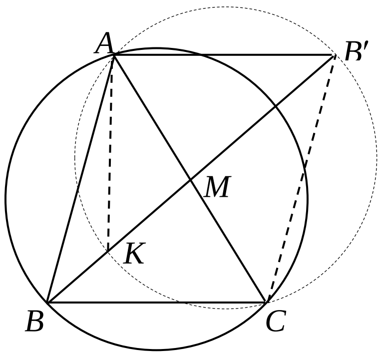


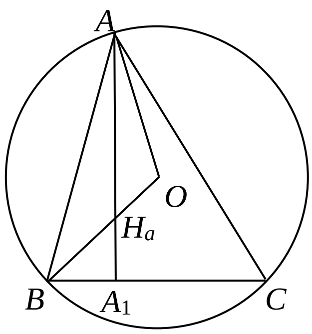
Но тогда любое уравнение вида $(x - a)^2 = \{x^2\}$ с достаточно большим a годится: в окрестности своей вершины парабола $y = (x - a)^2$ пересечёт много кусочков графика $y = \{x^2\}$.

5. [6] Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, точка M – середина стороны AC. Прямая BO пересекает высоты AA_1 и CC_1 в точках H_a и H_c соответственно. Описанные окружности треугольников BH_aA и BH_cC вторично пересекаются в точке K. Докажите, что K лежит на прямой BM.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Пусть B' – точка, симметричная B относительно M, а описанная окружность треугольника ACB' пересекает медиану BM в точке K. Тогда внешний угол AKB' треугольника AKB равен $\angle ACB' = \angle A$ (рис. слева). Но и внешний угол BH_aA_1 треугольника AH_aB равен $\angle BAA_1 + \angle ABO = 90^\circ - \angle B + 90^\circ - \angle C = \angle A$ (рис. справа). Поэтому $\angle AKB = \angle AH_aB$, т.е. точка K лежит на описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BH_cC.





Решение 2. Пусть BD – диаметр описанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle ADB = \angle C$, имеем:

$\angle CAH_a = \angle CAA_1 = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle ADB = \angle ABH_a$. Следовательно, сторона AC касается описанной окружности треугольника BH_aA. Аналогично она касается описанной окружности треугольника BH_cC. Как известно, радикальная ось BK этих двух окружностей проходит через середину M отрезка AC их общей касательной.