8-9 классы

Решения некоторых задач СЛОЖНОГО тура минских школьников и членов жюри

№ 1. Первое решение. Рассмотрим число вида $20\underbrace{88...88}_{k\text{ цифр}}21$. Покажем, что такое число делится на 47. Вычтем из него число $47\cdot13=611$, получим:

$$\begin{array}{r} 2088...8821 \\ -\quad 611 \\ \hline 2088...8210 \end{array}$$

Разделив на 10, получим число $20\underbrace{88...88}_{k-1\text{ цифр}}21$. Очевидно исходное число кратно 47 тогда и только тогда, когда полученное число делится на 47. Продолжая избавляться от восьмерок, придем к числу 2021, кратному 47.

Второе решение. Рассмотрим, что происходит при добавлении очередной восьмерки:

$$\begin{array}{r} 20821 \\ -\ 2021 \\ \hline 18800, \end{array}$$ т.е. 20821-2021=188·100,

$$\begin{array}{r} 208821 \\ -\ 20821 \\ \hline 188000, \end{array}$$ т.е. 208821-20821=188·1000,

$$\begin{array}{r} 2088821 \\ -\ 208821 \\ \hline 1880000, \end{array}$$ т.е. 2088821-208821=188·10000,

т.е. каждое следующее число отличается от предыдущего на $188\cdot10^k$, причем 188 кратно 47, и исходное число кратно 47, следовательно, все они будут кратны 47, т.е. будут составными.

№ 2.

Решение (*доказательство*). Пусть сначала детей k, из которых m мальчиков и l девочек, т.е. $k=m+l$. Запишем деление 1000 на k:

$$\frac{1000}{k}=c+\frac{1000}{k}=c+\frac{r}{k}, \text{ или}$$

$$1000=ck+r, \qquad \textbf{(*)}$$

где c - неполное частное, r - остаток, причем $0\le r<k$. Понятно, что при каждом делении конкретный ребенок будет брать либо c конфет, либо $(c+1)$ конфету. Будем называть действия каждого мальчика или девочки ходом (т.е. ход – это деление кучки, «забирание» своих конфет и уход ребенка).

1) Заметим, что если $r=0$, то на каждом ходу любой ребенок забирает ровно c конфет, что следует из равенств: $1000=ck,$

$$1000-c=c(k-1),$$

$$1000-2c=c(k-2),$$

и так далее.

Ясно, что в этом случае от порядка детей в очереди ничего не меняется. То же самое станет происходить, если после некоторого хода остаток r обратится в 0.

2) Пусть теперь $r>0$. Посмотрим, что произойдет с равенством **(*)**,

а) **если очередной ребенок будет мальчиком**, и

б) **если очередной ребенок будет девочкой**.

2.а) **Мальчик забирает $c+1$ конфету**, и получается

$$1000-c-1=c(k-1)+(r-1),$$

т.е. при ходе следующего ребенка остаток уменьшится на 1. И так будет с каждым мальчиком, пока $r>0$. Если мальчиков больше r (т.е. $m>r$), то в какой-то момент остаток исчезнет и все будут брать по c конфет (как в пункте 1).

б) **Девочка забирает c конфет**, и получается

$$1000-c=c(k-1)+r,$$

т.е. для следующего хода остаток остается прежним, а делитель, как и раньше, уменьшается на 1. И если в начале будет подходить достаточное количество девочек (в каком-то порядке, но до того как остаток исчезнет за счет мальчиков, см. пункт б)), то делитель может сравнятся с r, и тогда все будут брать по $(c+1)$ конфет.

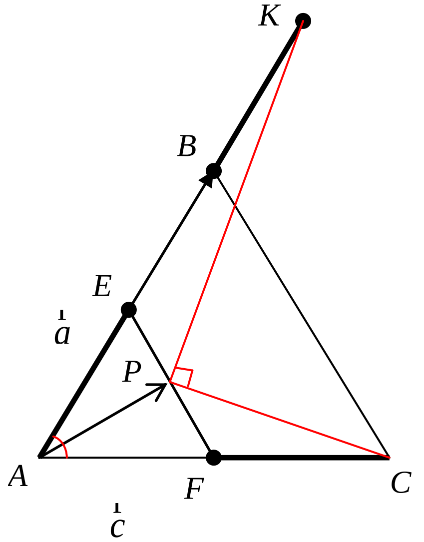
Подытожим сказанное.

- Если число девочек такое, что $k-l\geq r$ (или $l\leq k-r$), то девочки всегда будут брать по c конфет, т.е. при любом порядке в очереди девочки возьмут $l\cdot c$ конфет, а мальчики остальные $1000-l\cdot c$.
- Если число мальчиков $m<r$, то при любом порядке в очереди, либо будет оставаться $r>0$ и мальчики берут по $(c+1)$ конфете, либо если k сравняется с r (как описано в б)), то все будут брать по $(c+1)$ конфете, а значит, мальчики обязательно возьмут $m\cdot(c+1)$ конфету.

Учитывая теперь, что $k-l=m$, то в первом варианте имеем: $m\geq r$, а во втором $m<r$, т.е. мы рассмотрели все возможности.

№ 3. Решение (*для знатоков аналитической геометрии с применением векторов*).

Пусть длины сторон треугольника ABC равны 1, $AE=CF=BK=x,\ 0<x<1$ (см. рис.).



Обозначим $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}.$ Тогда $\overrightarrow{AE}=x\cdot\vec{a}, \overrightarrow{AK}=(1+x)\cdot\vec{a},$

$\overrightarrow{AF}=(1-x)\cdot\vec{c},\ \ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\vec{a}+(1-x)\cdot\vec{c}),$

$\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AP}=(1+x)\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\vec{a}+(1-x)\cdot\vec{c}),$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\frac{1}{2}\cdot(x\cdot\vec{a}+(1-x)\cdot\vec{c}),$

или

$\overrightarrow{PK}=\vec{a}+\frac{1}{2}x\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\vec{c}),$

$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}x\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}x\cdot\vec{c},$

откуда:

$$\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^2=0,$$

Так как скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{PC}$ равно 0, то они перпендикулярны.

№ 5. Решение. а) Очевидно, можно зажечь все лампочки, сделав 3 хода, т.е. проведя 3 прямые, см.рис. 1-3.

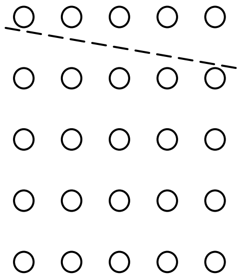


Рис. 1

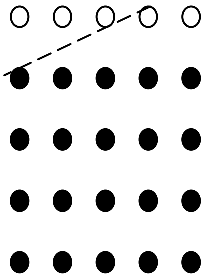


Рис. 2

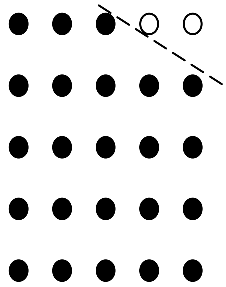


Рис. 3

Покажем, что за 4 хода сделать невозможно. Заметим, что при каждом ходе загорается, по меньшей мере, одна угловая лампочка. С другой стороны, на том ходу, когда загорается центральная лампочка, вместе с ней загорается, по меньшей мере, две угловые лампочки.

№ 5. Решение. б) Так же, как и в пункте а) можно заметить, что на каждом ходу зажигается хотя бы одна угловая лампочка, значит, более 4 ходов сделать нельзя. Общая идея конструкции – последовательности проводимых четырех прямых и зажигаемых лампочек представлена на рис.4-7. Заметим, что на рис.4 и 5 показано, как следует провести первые две прямые отсекающие «почти половину» лампочек за исключением угловых, а на рис.6 и 7 показано завершение процесса.

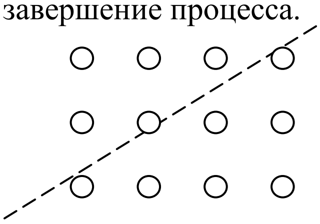


Рис. 4

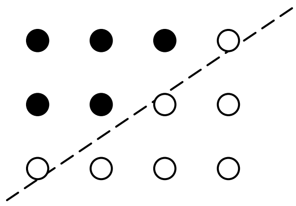


Рис. 5

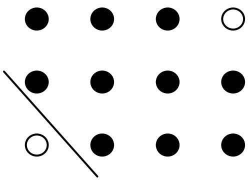


Рис. 6

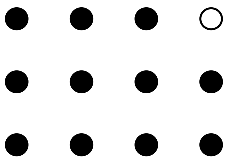


Рис. 7

Поясним построение этой конструкции аккуратно. Для этого расположим прямоугольник M на координатной плоскости так, что угловые лампочки имеют координаты A(0,5; 0,5); B(0,5; 19,5); C(20,5; 19,5); D(20,5; 0,5) смотрите рис.8. Покажем, что существует прямая, отсекающая от прямоугольника M «почти половину лампочек», точнее – половину, если не считать лампочки A и C, а именно: угловые лампочки A(0,5; 0,5) и C(20,5; 19,5) должны лежать выше искомой прямой, а лампочки с координатами (19,5; 18,5), (18,5; 17,5), …, (1,5; 0,5) – ниже.

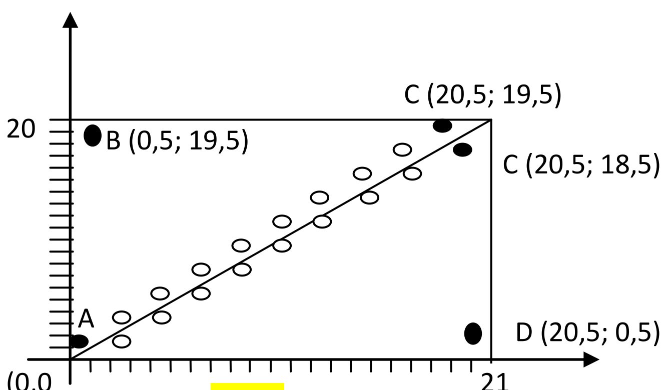


Рис.8

Такая прямая может проходить через начало координат, т.е. ее уравнение имеет вид $y = kx$, причем коэффициент k должен тогда удовлетворять условиям:

$$19{,}5 > k \cdot 20{,}5;\ \ 18{,}5 < k \cdot 19{,}5;\ \ 17{,}5 < \cdot 18{,}5;\ \ldots;\ \ 0{,}5 < k \cdot 1{,}5, \ \text{ или } \ \frac{18{,}5}{19{,}5} < k < \frac{19{,}5}{20{,}5}.$$

Такое k существует, ибо $19{,}5^2 > 20{,}5 \cdot 18{,}5 = (19{,}5-1)(19{,}5+1)$ и для него также выполняется:

$$k > \frac{18{,}5}{19{,}5} > \frac{17{,}5}{18{,}5} > \ldots > \frac{0{,}5}{1{,}5} \ \text{ и } \ k > \frac{18{,}5}{20{,}5}.$$

Таким образом, мы можем зажечь все лампочки ниже этой прямой. Затем мы проведем прямую, полученную из этой поворотом прямоугольника на 180°, и зажжем все лампочки выше такой прямой. Останутся две угловые лампочки А и С, которые легко зажечь за два хода (см. идею на рис. 6 и 7).

Задача № 6. Ответ: 50(*k*+2) при четном *k*, 50(*k*+1)+1 при нечетном *k*.

Решение. Назовем номер "бесконфликтным" при некотором обходе туристов, если ни при каком расположении номеров на ремонте, туристы не смогут побеспокоить друг друга в этом номере. Т.е. если какой-то турист заселяется в этот номер, то никакой другой турист этот номер уже проверять не будет. Выясним, каким условием должен обладать номер, чтобы быть "бесконфликтным".

Выберем двух туристов и некоторый номер. Пусть первый турист проверяет этот номер i-ым по счету в своем обходе, а второй – j-ым. Докажем следующее утверждение: номер будет "бесконфликтным" для этих студентов тогда и только тогда, когда i + j > k + 2.

Необходимость. Докажем от противного. Пусть номер "бесконфликтный", но i + j ≤ k + 2. Тогда i – 1 + j – 1 ≤ k, следовательно может случиться так, что все i – 1 номеров, которые проверял 1-ый турист до рассматриваемого номера, и все j – 1 номеров, которые проверял второй турист до рассматриваемого номера, были на ремонте, т.к. суммарно они проверили не более k номеров, следовательно в этом случае один из туристов заселится в рассмтриваемый номер, а второй его побеспокоит, а это противоречит тому, что номер "бесконфликтный". Данное противоречие и доказывает, что i + j > k + 2.

Достаточность. Пусть i + j > k + 2, докажем, что номер "бесконфликтный". Из условия следует i – 1 + j – 1 > k, покажем, что двое туристов не могут попытаться заселиться в этот номер. Пусть не нарушая общности первый турист заселяется в этот номер, это означает, что все i – 1 номеров, которые он проверял до рассматриваемого номера были на ремонте. Тогда среди оставшихся номеров на ремонте может быть не более k – i + 1 номеров, а т.к. j – 1 > k – i + 1, то среди j – 1 номеров, которые второй турист будет проверять до рассматриваемого номера обязательно найдется хотя бы один, который не на ремонте, и, следовательно, второй турист заселится туда.

Пусть теперь у нас есть n номеров. Каждому номеру поставим в соответствие набор из 100 чисел: первое число означает, каким по счету в обходе первого туриста будет данный номер, второе число – каким по счету в обходе второго туриста будет данных номер и т.д. для остальных 98 туристов. Заметим, обязательно существует номер, у которого в наборе на первом месте стоит 1 (2, 3, ..., n), – это тот номер, который первый турист проверяет первым (вторым, третьим и т.д. n-ным) при своем проходе номеров. Аналогичный вывод можно сделать про остальные позиции со 2-ой до 100-ой в наборах. Если некоторому номеру соответствует набор чисел (a1, a2, ..., a100), то для того, чтобы он была "бесконфликтным" для всех туристов по ранее доказанному необходимо и достаточно, чтобы для любой пары туристов s и t as + at > k + 2. Следовательно для каждого номера среди 100 чисел не может быть двух ≤ (k + 2)/2. Т.е. в наборе может быть не более одного числа ≤ (k + 2)/2, следовательно, таких наборов должно быть не менее 100 * [(k + 2)/2], т.к. каждое такое число должно побывать на всех 100 позициях, т.е. n ≥ 100 * [(k + 2)/2].

Пусть k четное, тогда 100 * [(k + 2)/2] = 50(k + 2). По доказанному n ≥ 50(k + 2), приведем пример, при котором достигается равенство. Разобьем все номера по группам по k+2 в каждой.

Каждую группу будут проверять ровно два туриста. Рассмотрим одну такую группу и покажем, как 2 туриста могут бесконфликтно заселиться, тогда для остальных групп и туристов будет аналогично. Занумеруем номера одной группы числами от 1 до k+2. Первый турист пусть проверяет номера в порядке 1, 2, 3 и т.д., а второй в обратном – k+2, k+1, ... Заметим, что т.к. количество номеров на ремонте k, то в такой группе есть как минимум 2 номера не на ремонте. Тогда первый заселится в номер с меньшим числом, а второй – с большим и ни один не будет беспокоить другого.

Пусть k нечетное. Тогда 100 * [(k + 2)/2] = 50 (k + 1). По доказанному n ≥ 50(k + 1). 50(k + 1) – это количество наборов по 100 чисел, в которых каждое из чисел от 1 до (k+1)/2 (целое число) встречается ровно по одному разу на каждой из 100 позиций. Заметим, что ни в одном из таких наборов не может встретиться число (k+3)/2, т.к. даже (k+1)/2 + (k+3)/2 = k + 2, а сумма любых пар чисел в наборе должна быть строго больше k+2.

Таким образом, n ≥ 50(k + 1) + 1. Приведем пример, при котором достигается равенство. Выберем один номер и назовем его "центральным", а остальные номера разделим на группы по k+1 номеру в каждом. Каждую группу будут проверять ровно два туриста. Рассмотрим одну такую группу и покажем, как 2 туриста могут бесконфликтно заселиться. Занумеруем номера одной группы числами от 1 до k+1. Первый турист пусть проверяет номера в порядке 1, 2, 3, ..., (k+1)/2, "центральный" номер, а затем номера (k+1)/2 + 1, ..., k+1., а второй в обратном порядке – k+1, ..., (k+1)/2 + 1, "центральный" номер, (k+1)/2, ..., 1. Туристы, проверяющие одну группу номеров не будут беспокоить друг друга, т.к. они проверяют с двух сторон k+2 номеров, и, следовательно, первый заселится в номер с меньшим номером, а второй – с большим (возможно, кто-то из них заселится в центральным номер). Теперь покажем, что туристы проверяющие разные группы номеров не побеспокоят друг друга. "Конфликт" может случиться только в "центральном" номере. Если два туриста пытаются заселиться в "центральный" номер, то это означает, что все предыдущие (k+1)/2 номеров, которые они проверяли были на ремонте, а тогда в сумме на ремонте должно быть k+1 номер, что противоречит условию. Значит, никакие туристы не побеспокоят друг друга.