6-7 кл., СЛОЖНЫЙ вариант *28 марта* 2021 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы ***Задачи***

3 1. Найдите все пары однозначных натуральных чисел (x, y) такие, что выполняется неравенство: $\frac{3}{4} < \frac{x}{y} < \frac{8}{9}$.

2. Сломанный разменный аппарат умеет выполнять две операции: обменять две монеты на пять и обменивать пять монет на две. У Пети есть 100 монет. Сможет ли он обменять свои монеты на 1000 монет, отдав разменному аппарату

3 а) ровно 2020 монет?

1 б) ровно 2021 монету?

5 3. Найдите все пары натуральных чисел A и B, каждое из которых меньше 100, для которых выполняется равенство:

$$10\cdot A = B^3 - B.$$

7 4. Пятизначное число А записывается только двойками и тройками, а семизначное число В – только тройками и четверками. Может ли произведение А×В записываться одними двойками?

7 5. В треугольниках ABC и MPK выполнены равенства $CB = KP$, $AC + AB = MK + MP$ и $\angle ABC = \angle MPK$. Обязательно ли треугольники ABC и MPK равны?

8 6. Егор записал натуральные числа от 1 до 500 по кругу. Затем пришёл Миша и начал зачёркивать все числа, начиная с 1 через каждые 14 чисел (т.е. зачёркиваются числа 1, 15, 29, …; при этом, когда Миша отсчитывает четырнадцатое число, он учитывает и числа, зачеркнутые ранее). Этот процесс Миша продолжал, пока, сделав некоторое число оборотов, не вернулся к уже зачёркнутой 1. Сколько после этого чисел осталось незачёркнутыми?

10 7. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых меньше 1000, можно выписать так, чтобы среди них не оказалось числа, делящегося на сумму своих цифр?

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 28 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Число $2021 = 43 \cdot 47$ составное. Докажите, что если вписать в числе 2021 сколько угодно восьмёрок между 20 и 21, тоже получится составное число.
5	2.	В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.
6	3.	Треугольник ABC равносторонний. На сторонах AB и AC выбрали точки E и F, а на продолжении стороны AB — точку K так, что $AE = CF = BK$. Точка P — середина EF. Докажите, что угол KPC прямой.
7	4.	Путешественник прибыл на остров, где живут 50 аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Все аборигены встали в круг, и каждый назвал сначала возраст своего соседа слева, а потом возраст соседа справа. Известно, что каждый рыцарь назвал оба числа верно, а каждый лжец какой-то из возрастов (по своему выбору) увеличил на 1, а другой — уменьшил на 1. Всегда ли путешественник по высказываниям аборигенов сможет определить, кто из них рыцарь, а кто лжец?
	5.	В центре каждой клетки клетчатого прямоугольника M расположена точечная лампочка, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, и зажечь все лампочки по какую-то одну сторону от этой прямой, если все они погашены. Каждым ходом должна зажигаться хотя бы одна лампочка. Требуется зажечь все лампочки, сделав как можно больше ходов. Какое максимальное число ходов удастся сделать, если
4	а)	M — квадрат 21×21;
4	б)	M — прямоугольник 20×21?
10	6.	В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, $\ldots$, n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.
12	7.	Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Лягушка прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Каждый раз она прыгает либо на p вправо, либо на q влево. Однажды лягушка вернулась в 0. Докажите, что для любого натурального $d < p + q$ найдутся два числа, посещённые лягушкой и отличающиеся ровно на d.

СОРОК ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 28 марта 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. В комнате находится несколько детей и куча из 1000 конфет. Дети по очереди подходят к куче. Каждый подошедший делит количество конфет в куче на количество детей в комнате, округляет (если получилось нецелое), забирает полученное число конфет и выходит из комнаты. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.
5	2. Существует ли такое натуральное n, что для любых вещественных чисел x и y найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам $x = a_1 + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad y = \dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$?
5	3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.
8	4. В ряд лежат $100N$ бутербродов с колбасой. Дядя Фёдор и кот Матроскин играют в игру. Дядя Фёдор за одно действие съедает один из крайних бутербродов. Кот Матроскин за одно действие может стянуть колбасу с одного бутерброда (а может ничего не делать). Дядя Фёдор каждый ход делает по 100 действий подряд, а кот Матроскин делает только 1 действие; дядя Фёдор ходит первым, кот Матроскин вторым, далее ходы чередуются. Дядя Фёдор выигрывает, если последний съеденный им бутерброд был с колбасой. Верно ли, что при каждом натуральном N он сможет выиграть независимо от ходов кота Матроскина?
8	5. В отель ночью приехали 100 туристов. Они знают, что в отеле есть одноместные номера 1, 2, ..., n, из которых k на ремонте (но неизвестно какие), а остальные свободны. Туристы могут заранее договориться о своих действиях, после чего по очереди уходят заселяться: каждый проверяет номера в любом порядке, находит первый свободный номер не на ремонте и остаётся там ночевать. Но туристы не хотят беспокоить друг друга: нельзя проверять номер, куда уже кто-то заселился. Для каждого k укажите наименьшее n, при котором туристы гарантированно смогут заселиться, не потревожив друг друга.
10	6. Найдите хоть одно вещественное число A со свойством: для любого натурального n расстояние от верхней целой части числа A^n до ближайшего квадрата целого числа равно 2. (Верхняя целая часть числа x — наименьшее целое число, не меньшее x.)
	7. Дано целое $n > 2$. На сфере радиуса 1 требуется расположить n попарно не пересекающихся дуг больших окружностей, все дуги равной длины α. Докажите, что
6	а) при любом $\alpha < \pi + \frac{2\pi}{n}$ это возможно;
7	б) при любом $\alpha > \pi + \frac{2\pi}{n}$ это невозможно.