6 – 7 класс

Предварительные решения

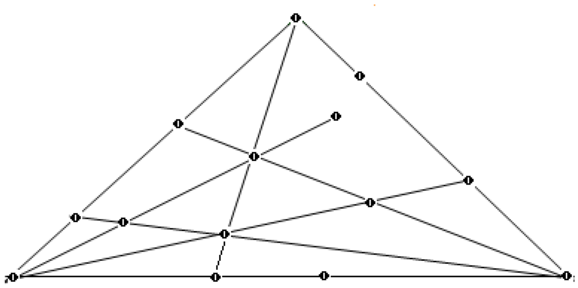
заданий 6-7 класса 43-го Турнира Городов (осень базовый тур)

1. Расшифруйте ребус $\overline{ТРИ}+\overline{ТРИ}=\overline{ПЯТЬ}$, если известно, что число $\overline{ПЯТЬ}$ принимает наибольшее значение (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые).

   Ответ: 946+946=1892.
   Решение. Заметим, что $\overline{ПЯТЬ}=2\cdot\overline{ТРИ}$ является четным числом. Значит $Ь$={0,2,4,6,8}, кроме того $Т\geq 5$ и $П=1$ (так как $2\cdot\overline{ТРИ}\leq 2\cdot 999=1998$). Наибольшее значение $\overline{ПЯТЬ}$ будет принимать тогда, когда $\overline{ТРИ}$ наибольшее. Пусть $Т$ = 9, тогда $Я=8$ и перехода из разряда десятков в разряд сотен не должно быть (так как $Т$ и $Я$ – разные цифры), т.е. $Р\leq 4$. Пусть $Р=4$, значит, чтобы в слове $\overline{ПЯТЬ}$ $Т=9$ должен быть переход из разряда единиц и $И\leq 7$, но при $И=7$ $Ь=Р=4$. При $И=6$ получим

2. Можно ли расставить на плоскости 14 точек и провести 8 отрезков так, чтобы на каждом отрезке было по 4 из расставленных точки.

Решение. Приведём один из примеров, удовлетворяющий условию задачи:



3. Турнир городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира: 2021 : 43 = 47. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

   Ответ ещё 4 раза
   Решение. Рассмотрим момент времени, когда с 2021 года пришло x лет. Тогда дробь $\frac{2021+x}{43+x}=\frac{43+x+1978}{43+x}=1+\frac{1978}{43+x}$ должна быть целой. Значит, значения x подбираем исходя из того, что 43 + x должны быть делителями числа 1978. Так как 1978=2*23*43, то x ={0, 3, 43, 946, 1935}. x = 0 не берем, так как нас спрашивают сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление.

4. У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом — серебряные, в третьем — бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и

бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?

Ответ: Достаточно достать 5 монет, по одной из каждого мешочка

Решение. Докажем, что 4 монеты недостаточно для того, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка. В самом деле, достав из 4-х мешков по одной монете, т.е. всего 4 монеты, и получив такой набор монет: 2 золотые, 1 серебряную и 1 бронзовую мы не сможем определить содержимое ни одного мешочка (*проанализируйте варианты самостоятельно*).

А 5 монет будет достаточно. Достанем по одной монете из каждого мешочка. Возможны следующие основные варианты: а){2з; 2с; 1бр}, б) {3з; 1с; 1бр }, ибо подобные варианты, но с одной золотой монетой и 2-мя или 3-мя монетами другого качества по рассуждению будут аналогичны приведенным. Проанализируем эти варианты.

а) 2 золотые вынимаются из мешочка с золотыми монетами и одного из мешочков со смесью монет, 2 серебряные вынимаются из мешочка с серебром и другого мешочка со смесью монет, значит, бронзовая вынимается из мешочка с 30 бронзовыми монетами. То есть мы смогли определить именно мешочек с бронзовыми монетами.

б) 3 золотые вынимаются из мешочка с золотом и обоих мешочков со смесью монет. Но тогда однозначно получается, что 1 серебряная монета вынута из мешочка с серебряными монетами и 1 бронзовая вынимается из мешочка с бронзовыми монетами. Значит, мы смогли определить состав даже двух мешочков: с 30 серебряными монетами и с 30 бронзовыми монетами.

5. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Натуральное число называется редким, если самый большой из его собственных делителей равен произведению самого маленького на следующий по величине. Сколько редких чисел делиться на 7?

ОТВЕТ: всего 14 редких чисел.

Решение. Пусть p_1 – наименьший делитель числа, p_2 – второй по старшинству делитель. Тогда наибольший делитель равен $p_1 \cdot p_2$, а само число $N = p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 = p_1^2 \cdot p_2$ (последнее следует из того, что при делении числа на самый маленький делитель в частном получится самый большой!).

Так как $p_1 < p_2$ и p_1^2 тоже является делителем числа N, то $p_2 \le p_1^2$. Если число делиться на 7, то или p_1=7 или p_2=7. Если p_1=7, то $N = 7^2 \cdot p_2$ и $p_1 < p_2 \le p_1^2$. Значит $p_2 = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49\}$. Если p_2=7, то $N = p_1^2 \cdot 7$ и $p_1 < p_2 = 7$. Значит $p_1 = \{2,3,5\}$. Заметим, что p_1=2 не подходит, так как в этом случае второй по старшинству делитель будет равен 4, а не 7 (не выполнится условие $p_1 < p_2 \le p_1^2$). Итак, получается 14 вариантов.