СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ.

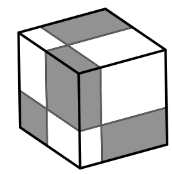
Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира:* $2021 : 43 = 47$. *Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?* *(Алексей Заславский)*

Ответ: ещё 4 раза. Так как сейчас 43-й Турнир, то осенний тур n-го Турнира проходит в году $46 \cdot 43 + n$. Число $46 \cdot 43 + n$ делится на n тогда и только тогда, когда $46 \cdot 43 = 2 \cdot 23 \cdot 43$ делится на n. У числа $2 \cdot 23 \cdot 43$ есть 4 делителя, больших чем 43 — это $2 \cdot 23$, $2 \cdot 43$, $23 \cdot 43$ и $2 \cdot 23 \cdot 43$.

Номер турнира N на $2021 - 43 = 1978$ меньше номера года M, и так будет всегда. Поэтому $M : N = 1 + 1978 : N$. Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного Турнира. Но $1978 = 43 \cdot 23 \cdot 2$, то есть оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на само себя. Поэтому ответ: ещё 4 раза, в 2024, 2064, 2967 и 3956 годах.

2 (5 баллов). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.* *(Олег Смирнов)*



Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (5 баллов). *У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом — серебряные, в третьем — бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?* *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 5 монет.

Пример. Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трёх видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то её достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

Оценка. Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырёх разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: З, Смеш, С, Смеш, Б и Смеш, З, Смеш, Б, С, не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4 (5 баллов). *Выпуклый n-угольник ($n > 4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный. Докажите, что среди любых четырёх сторон этого n-угольника есть хотя бы две равных.* *(Максим Дидин)*

Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол n-угольника — угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трёх острых углов (сумма внешних углов равна $360°$, поэтому среди них не больше трёх тупых), значит, этих групп не больше трёх. Следовательно, среди каждых четырёх сторон найдутся две из одной группы, то есть равные.

5 (5 баллов). *В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой? (Борис Френкин)*

Ответ: обязательно. Будем говорить, что шахматист A не слабее шахматиста B, если A выиграл и белыми, и чёрными не меньше партий, чем B. Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинаковое число побед чёрными. Значит, число побед белыми у всех разное, и число побед чёрными — тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, $\ldots$, 2, 1 и 0, и то же для количеств побед чёрными. Пусть 19 партий белыми выиграл A, а 19 партий чёрными выиграл другой шахматист B. Но тогда игру A с B, где A играл белыми, а B — чёрными, выиграли и A, и B. Такая ситуация невозможна, поэтому 19 партий белыми и чёрными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.

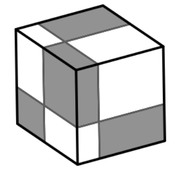
Базовый вариант, 10 – 11 классы

1 (3 балла). *Натуральное число k назовём* интересным*, если произведение первых k простых чисел делится на k (например, произведение первых двух простых чисел — это $2 \cdot 3 = 6$, и 2 — число интересное). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?*

(Борис Френкин)

Ответ: 3 числа. *Оценка.* Число интересно в точности тогда, когда оно свободно от квадратов, то есть каждое простое число появляется не больше одного раза в его разложении на простые. Теперь заметим, что числа, кратные четырём, не свободны от квадратов. *Примеры.* 1, 2, 3; 5, 6, 7.

2 (4 балла). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов. (Олег Смирнов)*



Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (6 баллов). *В белом клетчатом квадрате* 2021×2021 *требуется закрасить чёрным две клетки. После этого через каждую минуту одновременно закрашиваются чёрным все клетки, которые граничат по стороне хоть с одной из уже закрашенных. Ваня выбрал две начальные клетки так, чтобы весь квадрат закрасился как можно быстрее. Через сколько минут закрасился квадрат?*

(Иван Ященко)

Ответ: через 1515 минут. Занумеруем строки и столбцы числами от -1010 до 1010. Через n минут будут закрашены клетки, до которых хромая ладья (за ход сдвигается на соседнюю клетку) дойдёт от одной из исходных клеток не более чем за n ходов.

Пример. Закрасим клетки $A(-505, 0)$ и $B(505, 0)$. За 1515 ходов ладья дойдёт из B до любой клетки правой половины доски (клетки (x, y) с неотрицательным x): потребуется не более 505 ходов по горизонтали и не более 1010 по вертикали. Аналогично из A ладья дойдёт до любой клетки левой половины.

Оценка. Назовём *расстоянием* между клетками сумму расстояний между ними по вертикали и по горизонтали. Оно равно минимальному числу ходов, за которое хромая ладья сможет дойти из одной клетки в другую (и поэтому удовлетворяет «неравенству треугольника»). Пусть все клетки будут чёрными через 1514 минут. Противоположные угловые клетки не могут быть «обслужены» одной ладьёй: расстояние между ними больше чем $2 \cdot 1514$. Поэтому каждая ладья «обслужила» две угловые клетки с одной стороны, например ладья из клетки A — обе левые: $(-1010, \pm 1010)$, а ладья из клетки B — обе правые: $(1010, \pm 1010)$. Но тогда вторая ладья не успела дойти ни до одной из клеток $(0, \pm 1010)$: расстояние от такой клетки до противоположной угловой клетки равно $3030 > 2 \cdot 1514$. Аналогично и первая ладья не дошла до этих клеток. Противоречие.

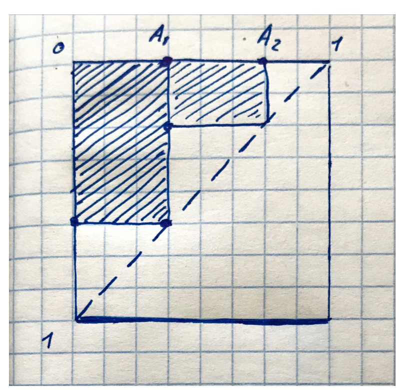
4 (6 баллов). *Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность.* *(Александр Матвеев)*

Пусть $AB = 2$, O и M — середины отрезков AB и YZ соответственно, H — ортоцентр треугольника XYZ. Поскольку треугольник XYZ равнобедренный, точка H лежит на серединном перпендикуляре к стороне YZ, то есть в плоскости π, перпендикулярной AB и проходящей через O. Точка X лежит на окружности ω радиуса $\sqrt{3}$ с центром O, лежащей в π. Пусть прямая XM второй раз пересекает ω в точке W (если XM касается ω, то точки X и W совпадают), а прямая OM пересекает ω в точках P и Q. Тогда $MX \cdot MW = MP \cdot MQ = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$.

Пусть YN — высота треугольника XYZ. Прямая YN пересекает прямую XM в ортоцентре H. Заметим, что прямоугольные треугольники HYM и YXM подобны, так что $MH : MY = MY : MX$. Поскольку $MY = 1$, то $MX \cdot MH = 1$. Поэтому $MH = MW$, а так как обе точки H и W лежат на луче MX, они совпадают. Таким образом, H лежит на ω.

5 (6 баллов). *Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.* *(Михаил Лукин)*

Первое решение. Построим на нашем отрезке как на стороне квадрат и проведём в нём диагональ, противоположную точке 0 (см. рисунок). Отметим точку A_1, разбив исходный отрезок на два. Произведение длин полученных отрезков равно площади заштрихованного прямоугольника, две противоположные вершины которого — 0 и точка на диагонали, лежащей на проведённом через A_1 перпендикуляре к стороне квадрата. Добавляя новые точки, мы будем добавлять на картинке новые прямоугольники, которые не накладываются друг на друга и все лежат не ниже диагонали. Поэтому их суммарная площадь (равная сумме чисел на доске) меньше половины площади квадрата, то есть $\frac{1}{2}$.



Второе решение. Будем писать на доске удвоенные произведения длин и докажем, что их сумма меньше 1. Заведём вторую доску, на которой будем записывать квадраты всех отрезков разбиения. Вначале на ней записано число 1. В дальнейшем при разбиении отрезка длины a на отрезки длин b

и c на первой доске появится число $2bc$, а на второй число $a^2 = (b+c)^2$ заменится на b^2 и c^2. Таким образом, общая сумма чисел на обеих досках не изменится, то есть останется равной 1. Поскольку сумма чисел на второй доске положительна, сумма чисел на первой всегда будет меньше 1.

Замечание. Усилить неравенство нельзя. Действительно, разделим отрезок пополам, затем — каждый из отрезков пополам, снова каждый из отрезков пополам, и т.д. Сумма чисел на доске будет равна $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, затем $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, и т.д., то есть может быть сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1 (5 баллов). *В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?*

(Алексей Заславский)

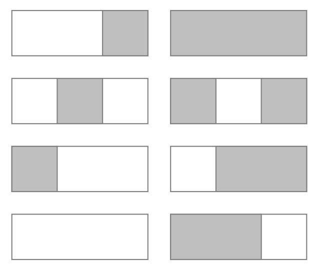
Ответ: 3 или 4. *Примеры:* $-1, \frac{1}{2}, 2$ и $-3, -1, 1, 3$.

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших их них: $a-d$, a, $a+d$, где $0 < d < a$. Обратные числа будут идти в обратном порядке: $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$, но $\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}$.

Замечание. Оба примера — единственные с точностью до постоянного множителя.

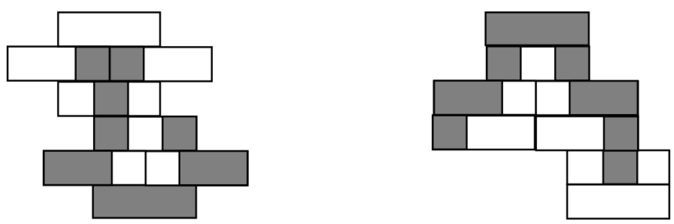
2 (6 баллов). *На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)*

(Дмитрий Ильинский)



Ответ: можно.

См. примеры на рисунке.

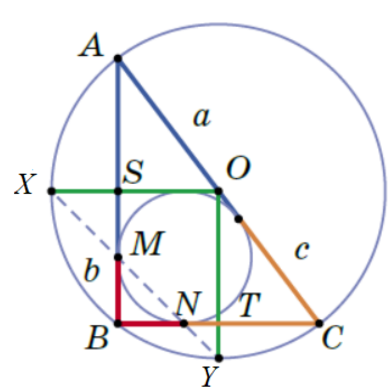


3 (7 баллов). *В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?*

(Максим Волчкевич)

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Первое решение. Пусть ABC — наш треугольник с прямым углом B, точка O — центр его описанной окружности, M и N — точки касания вписанной окружности с катетами AB и BC, X и Y — середины дуг AB и BC соответственно. Достаточно доказать, что M и N лежат на XY. Опустим из O перпендикуляры OS и OT на катеты AB и BC и продлим перпендикуляры до пересечения с описанной окружностью в точках X и Y соответственно. Пусть a, b, c — длины касательных из точек A, B, C к вписанной окружности.

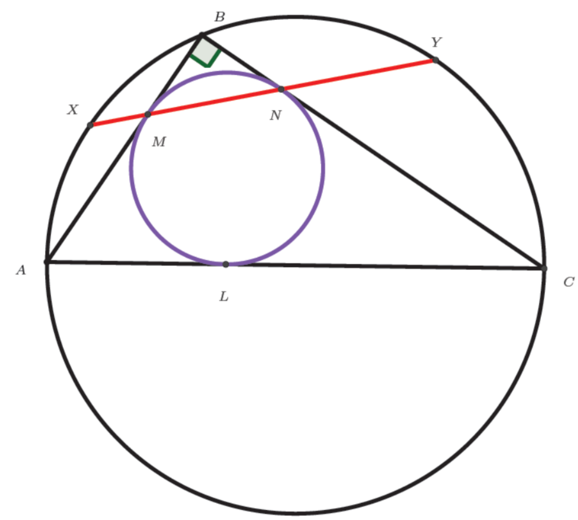


Треугольник XOY — равнобедренный прямоугольный. Заметим, что $OX = \frac{a+c}{2}$, $OS = \frac{b+c}{2}$, откуда $XS = OX - OS = \frac{a-b}{2}$. Если M' — точка пересечения XY с AB, то $SM' = SX = \frac{a-b}{2}$, откуда $SM' + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$, а значит, M' и M совпадают. Аналогично, N лежит на XY.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Точки касания вписанной окружности с катетами, очевидно, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку IC. По известной лемме о трезубце на этом же серединном перпендикуляре лежат середины K и L дуг AC и BC. Очевидно, дуга KL равна 45°.

Третье решение. Воспользуемся так называемой *Задачей 255*:

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Тогда проекция K точки C на биссектрису угла BAC лежит на прямой MN.



Пусть точка P — проекция точки A на биссектрису угла C, точка Q — проекция точки C на биссектрису угла A. По Задаче 255 точки P и Q лежат на прямой MN. Так как $90° = \angle ABC = \angle APC = \angle AQC$, то точки P и Q совпадают соответственно с X и Y. Значит, PQ — искомая хорда. Так как AQ и CP — биссектрисы, то P и Q — середины дуг AB и BC соответственно. Тогда центральный угол окружности, опирающийся на хорду PQ, прямой, и поэтому $PQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Четвёртое решение. Обозначения те же, что в предыдущем решении, а данная хорда обозначается XY (точки на прямой MN идут в порядке $X - M - N - Y$). Пусть L — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Пусть $1 = BM = BN$ (а не $AC = 1$!), тогда $NM = \sqrt{2}$, $AM = AL = a$, $CN = CL = b$, $MX = x$, $NY = y$.

Выразив двумя способами площадь треугольника ABC (как $\frac{AB \cdot BC}{2}$ и как pr), получим $\frac{(a+1)(b+1)}{2} = (1 + a + b) \cdot 1$, откуда $\boxed{ab = a + b + 1}$.

Запишем степень точки M относительно окружности: $\boxed{a = x(y + \sqrt{2})}$ (тот же результат можно получить, записав подобие треугольников MXA и MBY) и степень точки N: $\boxed{b = y(x + \sqrt{2})}$. Теперь подставляем a и b:

$$\begin{aligned} xy(x + \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) = ab = a + b + 1 = 2xy + \sqrt{2}(x + y) + 1, \\ xy(xy + \sqrt{2}(x + y) + 2) = 2xy + \sqrt{2}(x + y) + 1, \\ \sqrt{2}(x + y)(xy - 1) + (xy)^2 - 1 = 0, \\ (xy + 1 + \sqrt{2}(x + y))(xy - 1) = 0, \\ xy = 1. \end{aligned}$$

Подставляем полученное значение $xy = 1$:

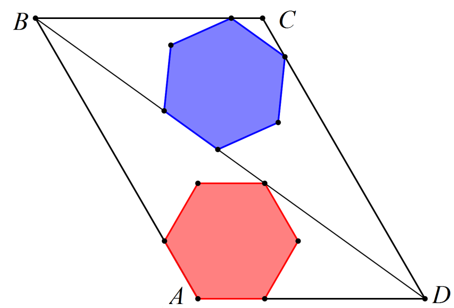
$$\begin{aligned} a = x(y + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}x, \\ b = y(x + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}y, \\ a + b = \sqrt{2}(x + y + \sqrt{2}), \\ AC = \sqrt{2}XY. \end{aligned}$$

4 (8 баллов). *На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник? (Александр Грибалко)*

Ответ: нет. На первом ходу Вася не проиграет, так как нет точных двузначных квадратов с цифрой 7. Покажем, что далее каждый может приписать в конец текущего числа 2 или 3 так, чтобы соперник не выиграл следующим ходом.

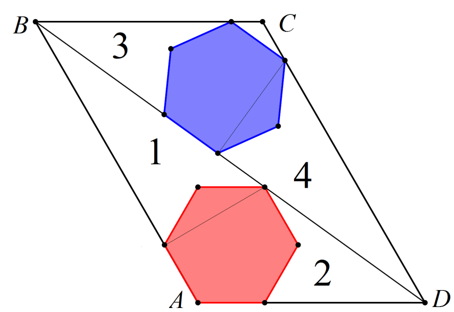
Пусть у нас было число A, и соперник может сделать квадрат, приписав цифру как к числу $\overline{A2}$, так и к числу $\overline{A3}$. Поскольку точные квадраты не оканчиваются ни на 2, ни на 3, он припишет цифру в конец: скажем, x — в первом случае и y — во втором. Тогда оба числа $\overline{A2x}$ и $\overline{A3y}$ — точные квадраты, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трёхзначное, и тогда разность между соседними точными квадратами не меньше $11^2 - 10^2 > 20$. Противоречие.

5 (9 баллов). *Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше? (Константин Кноп)*

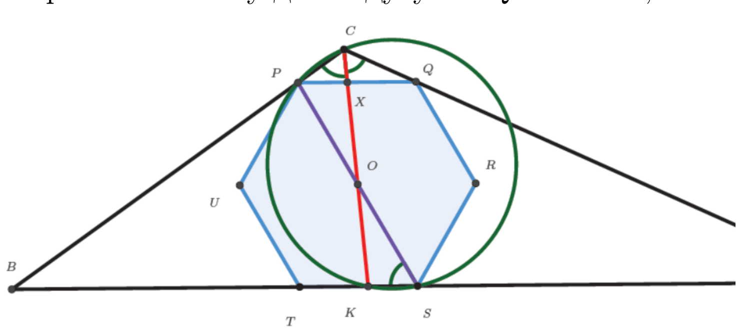


Ответ: тот, который примыкает к вершине A.

Первое решение (Макар Чудновский, 7 класс). Параллелограмм разделён на два данных шестиугольника, четыре невыпуклых четырёхугольника, которые мы обозначили на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине C. Заметим, что четырёхугольники 1 и 4 подобны — они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом $120°$ при вершине. Аналогично, подобны четырёхугольники 2 и 3. Заметим, что коэффициенты подобия равны отношению сторон данных шестиугольников. Но площади половинок параллелограмма ABD и CBD равны, причём половинка ABD состоит из первого шестиугольника и четырёхугольников 1 и 2, а вторая — из второго шестиугольника, четырёхугольников 3 и 4 и ещё белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине A, больше.



Второе решение. Диагональ красного шестиугольника совпадает с биссектрисой треугольника ABD, которая равна биссектрисе CK треугольника BCD. Пусть синий шестиугольник — это $PQRSTU$, как на рисунке. Требуется сравнить диагонали CK и PS правильных шестиугольников. Они пересекаются в центре O шестиугольника, так как четырёхугольник $PCQO$ вписанный, CK биссектриса и поэтому делит дугу POQ пополам, то есть проходит через O.



Заметим, что прямая CO пересекает отрезок PQ, поэтому (из симметрии относительно O) она пересекает и отрезок TS. Углы PCK и PSK равны по 60°. Далее есть несколько способов.

Первый способ. Треугольники PCO и KSO подобны по двум углам. Пусть $PO = SO = a$, $OK = 1$, тогда $OC = a^2$. В треугольнике PCO: $\angle P > 60^\circ = \angle C$, значит, $CO > PO$ и поэтому $a > 1$. Получаем $PS = 2a$, $CK = a^2 + 1$, их разность $CK - PS = (a-1)^2 > 0$.

Второй способ. Заметим, что точки P, C, S, K лежат на одной окружности. Требуется сравнить её хорды CK и PS — диагонали правильных шестиугольников. Чтобы сравнить хорды, достаточно сравнить величины меньших дуг, которые они стягивают. Не умаляя общности, $\angle CBD \geqslant \angle CDB$, тогда угол CKS не острый, и равный ему угол CPS — тоже не острый. Тогда тупыми будут углы PKS и CPK, откуда дуги PKS и CPK — меньше полуокружности, их нам и надо сравнить.

Общую часть этих дуг можно выбросить и сравнить дуги CP и KS, а для этого достаточно сравнить хорды CP и KS. Пусть X — точка пересечения PQ и CK. Тогда $PX = SK$ (в силу симметрии относительно O). Заметим, что $\angle CPX = \angle CBK < 60^\circ$ (так как угол B параллелограмма равен 60°), $\angle PCX = 60^\circ$, откуда $\angle CXP > 60^\circ$. Значит, $SK = PX < PC$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Третий способ. Из той же окружности получаем, что

$$CK = OC + OK \geqslant 2\sqrt{OC \cdot OK} = 2\sqrt{OP \cdot OS} = 2OP = PS$$

(равенства нет, потому что $OE < OP < OC$).

6 (9 баллов). *Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство*

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

(Максим Дидин)

Перепишем очевидное неравенство $(a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 0$ в виде $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Так как число справа — целое, то и $\left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Сложив такие неравенства, получим требуемое.

7 (12 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон? (Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R+L=20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k=L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k=R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L<k<R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1<L\leqslant k-1<k\leqslant R-1<R$.

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (5 баллов). *Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \ldots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.*
A: «На одной из моих карточек — число 8».
B: «Все числа на моих карточках простые».
C: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».
D: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».
Какие карточки у A, если все сказали правду? *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 1, 8 и 9. **Решение.** Простые числа могут быть только у A, B и D. На карточках B — три из пяти возможных простых чисел (2, 3, 5, 7, 11). Остальные два простых числа — у D, иначе он не знал бы, какие именно из простых чисел есть у B, а какие — у A. На карточках C могут быть тройки (4, 6, 10), (4, 6, 12), (4, 10, 12), (6, 10, 12) или (6, 9, 12). Только если у D есть 6 или 12, он может определить, какая именно тройка у C. Итак, у D — два простых числа и одно из чисел 6 и 12, у C соответственно — 4, 6, 10, или 4, 10, 12, у B — три простых числа, у A — числа 1, 8, 9.

2 (7 баллов). *В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)* *(Александр Грибалко)*

Первое решение. Зафиксируем диагональ. Так как в маршруте чётное число клеток, крайние клетки маршрута будут разного цвета, поэтому на диагонали не более одной крайней клетки. Ход ладьи соединяет две клетки (направление не важно). Из крайних клеток маршрута выходит один ход, из всех остальных — по два. С диагонали выходит не менее $2\cdot 10-1=19$ ходов. Все они ведут на соседние с диагональю клетки, а их только 18. Значит, есть два хода, соединяющих клетку диагонали с одной соседней клеткой. Это и есть искомая пара последовательных ходов.

Второе решение (Валерий Миронов, 11 кл.) На диагонали 10 клеток. Клетки, пройденные между ними, составляют 9 кусков маршрута. Тогда хотя бы 5 из этих 9 кусков должны располагаться с одной стороны от диагонали. У этих 5 кусков маршрута 10 начал/концов, расположенных на диагонали, соседней с главной, а на этой диагонали 9 клеток. Значит, начало и конец одного из кусков маршрута совпадают, что и требовалось.

3 (7 баллов). *На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку финишной, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?* *(Михаил Святловский)*

Ответ: C_{2020}^{1010}.

Первое решение. *Оценка.* Введём на плоскости систему координат так, чтобы Коля сидел в точке $(0,0)$. Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_{2020}$ — радиус-векторы кузнечиков в порядке их перепрыгивания Колей. Нетрудно найти радиус-вектор финишной точки: $2(-\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3+\ldots-\vec{a}_{2019}+\vec{a}_{2020})$. Число различных по виду сумм равно C_{2020}^{1010} (числу способов выбрать 1010 слагаемых на нечётных местах).

Пример. Расположим кузнечиков в точках числовой прямой с координатами 0 (у Коли) и $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{2019}$ у остальных. Докажем, что все суммы степеней троек с коэффициентами ± 1 различны. Прибавив к такой сумме постоянную сумму $1+3+3^2+\ldots+3^{2019}$, получим сумму с коэффициентами 0 и 2. Она соответствует 2020-значному троичному числу из нулей и двоек, а все такие числа различны. (На самом деле, почти любое расположение кузнечиков даёт C_{2020}^{1010} финишных точек.)

Второе решение. *Оценка.* Сначала заметим, что если кузнечик перепрыгнет через какую-то точку A, а затем — через какую-то точку B, то в итоге он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Это следует, например, из того, что средняя линия треугольника параллельна основанию и в два раза меньше его (случай, когда кузнечик сидит на прямой AB, можно рассмотреть отдельно).

Каждой финишной точке можно поставить в соответствие последовательность, в которой Коля перепрыгивал своих друзей, чтобы оказаться в этой точке после 2020 прыжков — то есть перестановку чисел от 1 до 2020 (считаем всех кузнечиков, кроме Коли, пронумерованными). Пусть Коля в какой-то момент оказался в точке O и собирается перепрыгнуть кузнечиков, расположенных в точках A, B, C (рассматриваем только 3 последовательных прыжка). Если Коля сделает эти прыжки в порядке ABC, то сначала он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{OA}$, а затем за два прыжка сдвинется ещё на вектор $2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$, то есть в итоге за три прыжка сдвинется на вектор $2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$. Если же Коля сделает эти прыжки в порядке CBA, то, аналогично, сдвинется в итоге на вектор $2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, то есть попадёт в ту же самую точку, что и в предыдущем случае. Таким образом, в последовательности прыжков Коли можно поменять местами любых двух кузнечиков, стоящих через один, и это не изменит финишной точки. Значит, финишная точка характеризуется не перестановкой чисел от 1 до 2020 (которых $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2020$), а только тем, какие числа в такой перестановке стоят на нечётных местах. Соответственно, различных финишных точек не может быть больше C_{2020}^{1010}.

Пример. См. предыдущее решение.

4 (7 баллов). *При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b, что $|a-b| \leqslant k$ или $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}| \leqslant k$?* *(Максим Дидин)*

Ответ: при $k=\frac{3}{2}$.

Докажем, что для любых трёх ненулевых чисел $a<b<c$ одна из шести разностей $b-a$, $c-b$, $c-a$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|$, $|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}|$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{c}|$ не превосходит $\frac{3}{2}$. Не умаляя общности, хотя бы два числа положительны.

Первый способ. Предположим противное. Заменой всех чисел на обратные к ним можно добиться того, чтобы наименьшее число a было не меньше -1. Тогда среднее число $b>\frac{1}{2}$, а наибольшее $c>2$. При этом $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>\frac{3}{2}$. Значит, $b<2/3<1$ и $a<0$. Получаем систему неравенств

$$-a > \frac{3}{2}-b, \qquad -\frac{1}{a} > \frac{3}{2}-\frac{1}{c} > 3-\frac{1}{b}.$$

Перемножив, получим $1 > (\frac{3}{2} - b)(3 - \frac{1}{b})$, откуда $2b > (3 - 2b)(3b - 1)$. Раскрыв скобки и перенеся всё в левую часть, получим $6b^2 - 9b + 3 > 0$. Тогда $(b - 1)(2b - 1) > 0$, противоречие.

Второй способ. Разберём возможные случаи.

1) $a > 0$. Если $b \leqslant 1$, то $b - a < 1$; если $b > 1$, то $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} < 1$.

2) $a < 0$. Можно считать, что $bc \leqslant 1$ (иначе заменим все числа на обратные). Пусть $b - a > \frac{3}{2}$ и $c - b > \frac{3}{2}$. Тогда $b(b + \frac{3}{2}) < bc \leqslant 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})$. Значит, $b < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} < \frac{1}{\frac{3}{2} + b} + \frac{1}{\frac{3}{2} - b} = \frac{3}{\frac{9}{4} - b^2} < \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Улучшить результат нельзя: для чисел $-1, \frac{1}{2}, 2$ все шесть разностей не меньше $3/2$.

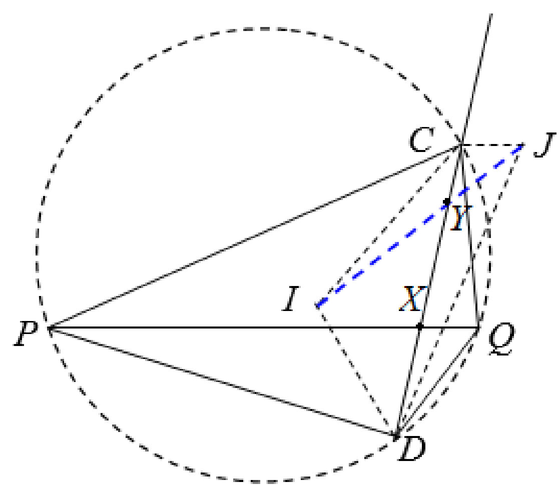
5 (9 баллов). *Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.* *(Иван Фролов)*

Указание. После параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AD}$ задача превращается в такую:

Дан произвольный вписанный четырехугольник $CPDQ$. Тогда одна из общих касательных к окружности, вписанной в треугольник PCD и вневписанной для треугольника CDQ напротив вершины D, параллельна PQ.

Последнее следует из одной из вариаций известного факта о том, что прямая между соответствующими инцентрами (эксцентрами) треугольников PCD, QCD параллельна биссектрисе между CD и PQ (последнее в свою очередь следует из леммы о трезубце).

Решение. Перенеся треугольник PAB на вектор $\overrightarrow{AD}$, получим треугольник QDC. Окружность ω_1 также сдвинется параллельно AD и перейдёт во вневписанную окружность треугольника с центром J, поэтому достаточно доказать, что одна из общих касательных к ω_3 и ω_2 параллельна AD.



По условию $\angle QPD = \angle PDA = \angle PBA = \angle QCD$, значит, точки C, P, D и Q лежат на одной окружности. По известным формулам углов между биссектрисами

$$\angle CID + \angle CJD = \left(\frac{1}{2}\angle CPD + 90^\circ\right) + \left(\frac{1}{2}\angle CQD\right) = 180^\circ,$$

то есть точки C, I, D и J лежат на одной окружности.

Пусть X и Y — точки пересечения CD с PQ и IJ соответственно. Имеем

$$\angle IYD = \angle ICD + \angle CDJ = \frac{1}{2}(\angle PCD + \angle CDQ),$$

как угол между хордами, отсюда, в частности, угол IYD острый, так как

$$\angle PCD + \angle CDQ < \angle PCQ + \angle PDQ = 180^\circ.$$

Тогда точка D', симметричная точке D относительно IJ, лежит по ту же сторону от CD, что и P, и при этом

$$\angle CYD' = 180^\circ - \angle X'YD = 180^\circ - 2\angle IYD = 180^\circ - (\angle PCD + \angle CDQ) = \angle PDC + \angle DCQ = \angle PXC$$

(последнее верно, так как $PCQD$ вписанный). Итак, соответственные углы PXC и CYX' при пересечении прямой CD секущими PQ и $D'Y$ равны, значит $D'Y||PQ||AD$, и прямая $D'Y$ симметрична общей касательной CD относительно линии центров IJ, значит $D'Y$ тоже общая касательная, и она параллельна AD.

6 (10 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

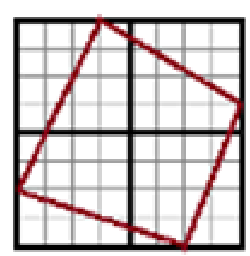
Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R+L=20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k=L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k=R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L<k<R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1<L\leqslant k-1<k\leqslant R-1<R$.

7. *Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли*
а) (6 баллов) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;
б) (6 баллов) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?
(Александр Шаповалов)

а) Ответ: не обязательно. Впишем в квадрат четырёхугольник без параллельных сторон так, чтобы одна его сторона разбила на части обе левые клетки, вторая — обе верхние, третья — обе правые, четвёртая — обе нижние. Продлим пары противоположных сторон до пересечения. Теперь квадрат покрыт двумя углами, при этом нет клетки, целиком покрытой одним углом. Отрезав лишнее, превратим углы в треугольники. На рисунке — пример искомого четырёхугольника на клетчатой бумаге со вспомогательными клетками размера $0,25\times 0,25$.



б) Ответ: обязательно. Отметим 9 вершин клеток квадрата 2×2 как на рисунке 1. Треугольники их все накрывают. Возможны три случая распределения вершин квадрата A, B, C, D между треугольниками.

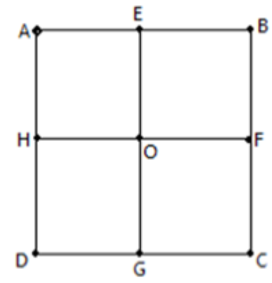


Рис. 1

1) В один накрывающий треугольник T попали три вершины, скажем, A, B, C. Тогда фигура T накрывает весь треугольник AB и, тем более, клетку $BFOE$.

2) В накрывающие треугольники попали пары вершин на противоположных сторонах, скажем, в один A, B, в другой C, D. Тогда первый накрывает и точку E, а второй — точку G. Из трёх точек H, O, F либо две, либо все три попадут в один треугольник. В силу выпуклости среди них есть пара точек на расстоянии 1. Пусть, например, H и O попали вместе с A, E, B. Тогда в этом треугольнике лежит клетка $AEOH$.

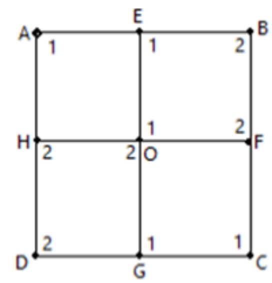


Рис. 2

3) В накрывающие треугольники T_1 и T_2 попали пары противоположных вершин квадрата: скажем, в T_1 — A и C, в T_2 — B и D (рис. 2). Тогда лежащая на пересечении диагоналей точка O попала и в T_1, и в T_2. Будем искать такое распределение точек E, F, G, H по треугольникам, чтобы ни один из треугольников не накрывал целую клетку. Можно считать, что точка E попала в T_1. Тогда H — в T_2 (иначе T_1 накроет клетку $AEOH$), G — в T_1 (иначе T_2 накроет $HOGD$), F — в T_2 (иначе T_1 накроет $OFCG$).

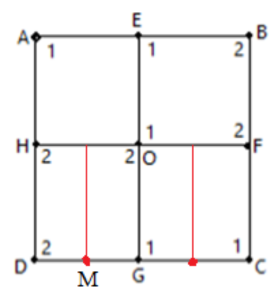


Рис. 3

Рассмотрим теперь середину M отрезка DG (рис. 3). Если она тоже принадлежит T_1, то, сдвинув клетку $DHOG$ на $1/2$ вправо, мы расположим её целиком в T_1 (ведь середина AG, лежащая над M, лежит в T_1, и середина EC лежит в T_1). Значит, можно считать, что M лежит в T_2.

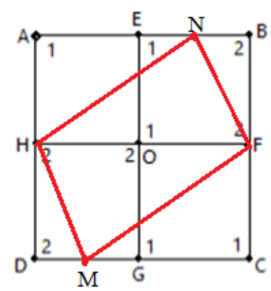


Рис. 4

Аналогично, можно считать, что середина N отрезка EB лежит в T_2. Но тогда в T_2 лежит параллелограмм $MHNF$ (рис. 4).

Осталось доказать, что внутрь $MHNF$ помещается квадрат 1×1. Заметим, что угол NHM тупой (например, потому, что угол MHB прямой). Далее, площадь параллелограмма $MHNF$ равна $4 - 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,5 = 2$. Далее, $HN = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Тогда высота HX параллелограмма $MHNF$, опущенная из H на MF, равна $2 : \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$. При этом

$$MX = \sqrt{HM^2 - HX^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} - HX^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $HN - MX > \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} > 1$, откуда в параллелограмм $MHNF$ помещается квадрат с вершиной H и стороной длины 1, идущей вдоль HN.