СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

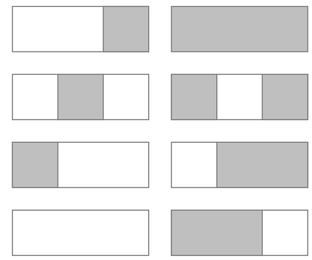
8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5 1. В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?

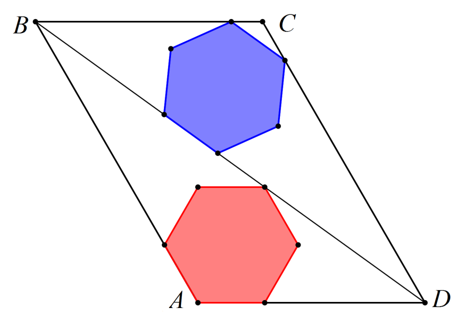
6 2. На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)



7 3. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?

8 4. На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

9 5. Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше?



9 6. Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

12 7. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
5	1. Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \ldots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее. A: «На одной из моих карточек — число 8». B: «Все числа на моих карточках простые». C: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель». D: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас». Какие карточки у A, если все сказали правду?
7	2. В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)
7	3. На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку *финишной*, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?
7	4. При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b, что $\|a-b\| \leqslant k$ или $\left\|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right\| \leqslant k$?
9	5. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.
10	6. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?
	7. Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли
6	а) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;
6	б) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?