Предварительные решения задач
базового варианта 10-11 класса 43-го ТГ (6 марта 2022).

№ 1. Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали k умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных k чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно k раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи.

Решение: Итак, записаны числа $n, 5n, 25n, \ldots, 5^{k-1}n, 5^k n.$ Пусть $N = 5^k n.$ Тогда заметим, что для любого натурального числа от 1 до k выполняется следующее:

$$2^1 \cdot N = (2\cdot 5)\cdot\left(5^{k-1}\cdot n\right) = 10\cdot\left(5^{k-1}\cdot n\right)$$ - не имеет 7 в записи;

$$2^2 \cdot N = \left(2^2\cdot 5^2\right)\cdot\left(5^{k-2}\cdot n\right) = 100\cdot\left(5^{k-2}\cdot n\right)$$ - не имеет 7 в записи;

$$2^k \cdot N = \left(2^k\cdot 5^k\right)\cdot n = 10^k\cdot n$$ - не имеет 7 в записи.

Значит, N - искомое число, что и требовалось доказать.

№ 2. На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Ответ: да, сможет.

Решение 1: Обозначим монеты: ①,②,③ - те, которые Алиса хочет отдать, ④ - одна из оставшихся.

Первым шагом взвесим ① и ② и ③ и ④.

1. ①+②>③+④. Это значит, что среди монет ① и ② не более одной фальшивой, а среди ③ и ④ точно есть хотя бы одна. Сравним ③ и ④: если получаем равенство, то обе фальшивые, если же неравенство, то понимаем какая из них фальшивая, а также то, что ① и ② настоящие.
2. ①+②=③+④. Среди каждой из групп либо нет фальшивых, либо по одной. Сравниваем ① и ②, если есть неравенство, значит, есть фальшивые монеты.
3. ①+②<③+④. Среди ① и ② точно если фальшивая.

Решение 2: Перенумеруем монеты номерами от 1 до 8. Пусть 1, 2, 3 нужно проверить.

1-м взвешиванием сравним монеты 1, 2, 3 и 4, 5, 6. Заметим, что среди этих шести монет точно есть по крайней мере одна фальшивая, по этому, если весы уравновесятся или монеты 1, 2, 3 окажутся легче, то среди них точно есть фальшивая (в случае равенства на каждой чаше будет по одной фальшивой монете).

Проанализируем вариант, когда монеты 1, 2, 3 перевесят. В этом случае 3 фальшивые монеты могут так распределиться среди 8 монет:

	1,2,3		4,5,6	7,8
I	—	>	1ф.	2ф.
II	—	>	2ф.	1ф.
III	—	>	3ф.	—
IV	1ф.	>	2ф.	—

(здесь запись 1ф., 2ф. или 3ф. означает число фальшивых монет в соответствующей группе)

Теперь нужно одним взвешиванием отличить 4-й случай от остальных. Небольшой анализ (или перебор) покажет, что подойдет следующий вариант 2-го взвешивания: 1, 2, 3 и 6, 7, 8.

Ясно, что в случаях I, II, III монеты 1, 2, 3 перевесят. А в случае IV получится либо равенство (если 6-я монета фальшивая), либо монеты 1, 2, 3 окажутся легче если 6-я – настоящая!

№ 3. Пусть n — натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, \ldots$, an интересной, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовем интересную последовательность чётной, если сумма её членов чётна, и нечётной — иначе. Для каждой нечётной интересной последовательности нашли произведение её чисел и записали его на первый листок. Для каждой чётной — сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от n.).

***Ответ*: при $n=4k$ $(k>0)$ или $4k+1\ (k\geq 0)$ сумма по четным последовательностям больше на 1; при $n=4k+2$ или $4k+3$ $(k\geq 0)$ сумма по нечетным последовательностям больше на 1.**

Решение: Будем называть число n длиной последовательности и обозначить S_1^n – сумму произведений членов нечетных последовательностей длины n, а S_2^n – сумму произведений членов нечетных последовательностей, а их разность Δ_n

1) При $n=1$ имеем: a_1 равно 1 или 2, т.е. всего будет по одной четной и нечетной последовательности, причем $S_1^1=1;\ S_2^1=2 \ \Rightarrow\ \Delta_1=S_1^1-S_2^1=-1$

2) При $n=1$ имеем: $a_1=1$ или 2

$a_2=2$ или 3.

К предыдущим последовательностям добавится по одному члену, причем, если добавить $a_2=2$, то четность последовательности не изменится, а если $a_2=3$, то изменится на противоположную. При этом суммы произведений посчитаются так:

по нечетным: $S_1^2=S_1^1\cdot 2+S_2^1\cdot 3=S_1^1\cdot a_2\big|_{a_2=2}+S_2^1\cdot a_2\big|_{a_2=3}=1\cdot 2+2\cdot 3=8$

по четным: $S_2^2=S_1^1\cdot 3+S_2^1\cdot 2=S_1^1\cdot a_2\big|_{a_2=3}+S_2^1\cdot a_2\big|_{a_2=2}=1\cdot 3+2\cdot 2=7$,

и $\Delta_2=S_1^2-S_2^2=1=-\Delta_1$.

Обратим внимание, что здесь и далее изменение S_1^n, S_2^n и Δ_n будет происходить аналогично. В частности,

3) при $n=3$ имеем: ко всем предыдущим последовательностям добавится $a_3=3$ или $a_3=4$, причем в первом случае четность последовательности изменится, а во втором – нет.

Тогда: $S_1^3=S_1^2\cdot a_3\big|_{a_3=4}+S_2^2\cdot a_3\big|_{a_3=3}=8\cdot 4+7\cdot 3=32+21=53$

$$S_2^3=S_1^2\cdot a_3\big|_{a_3=3}+S_2^2\cdot a_3\big|_{a_3=4}=8\cdot 3+7\cdot 4=24+28=52$$

и $\Delta_3=53-52=1=\Delta_2$.

4) При $n=4$ аналогично получим, что $\Delta_4=-1$.

Аналогично далее будет: пусть к последовательности длины $(n-1)$ добавится новый член $a_n=n$ или $n+1$.

Если n – четное, то $S_1^n=S_1^{n-1}\cdot n+S_2^{n-1}\cdot(n+1)$,

$S_2^n=S_1^n\cdot(n+1)+S_2^n\cdot n$ и $\Delta_n=S_1^n-S_2^n=-S_1^{n-1}+S_2^{n-1}=-\left(S_1^{n-1}-S_2^{n-1}\right)=-\Delta_{n-1}$.

Если n – нечетное, то $S_1^n=S_1^{n-1}\cdot(n+1)+S_2^n\cdot n$;

$S_2^n=S_1^{n-1}\cdot n+S_2^{n-1}\cdot(n+1)$ и $\Delta_n=S_1^{n-1}-S_2^{n-1}=\Delta_{n-1}$.

Таким образом, все Δ_n равны +1 или -1, причем знак меняется только на четных n, поэтому имеет такую последовательность для Δ_n: $-1;\ 1;\ 1;\ -1;\ -1;\ 1;\ 1;-1;-1$ и т.д.

№ 4. Прямоугольник 1 × 3 будем называть триминошкой. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20 × 21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

***Ответ*: 14 рублей.**

Решение. Покажем, что Вася не может гарантированно выиграть более 14 рублей. Действительно, разрежем доску следующим образом на 14 триминошек и 42 квадрата 3×3 как показано на рисунке:

1×3	...					
1×3	...					
3×3	3×3	...				3×3
...						
3×3						3×3

В каждом квадрате 3×3 Петя может расположить 3 триминошки горизонтально или вертикально, поэтому как бы Вася не поставил свои триминошки в нижней части доски 18×21 Петины триминошки могут не совпасть ни с одной Васиной. Например, если хоть одна Васина триминошка в некотором (вообще говоря, произвольном) квадрате 3×3 лежит горизонтально, то все три Петины могут лежать в этом квадрате вертикально, и наоборот. (Тем более, если какие-то Васины триминошки лежат в этом квадрате частично.) Поэтому гарантировать совпадение триминошек в указанной части нельзя, и Петя может проиграть по рублю только за 14 верхних триминошек.

Предположим теперь, что Вася расположил все свои триминошки горизонтально. Покажем, что тогда он гарантированно выигрывает 14 рублей. Разрежем доску на 7 вертикальных полос 3×20 и докажем, что в каждой полосе Петя вынужден расположить хотя бы две горизонтальные триминошки всего получится 14 триминошек, совпадающих с триминошками Васи.

Пусть a_i, $i = 1, 2, ..., 18$ – число горизонтальных триминошек, левая клетка которых расположена в i-той вертикали. (Ясно, что a_{19} и a_{20} равнют нулю, ибо горизонтальные триминошки не могут иметь свои левые клетки в 19-м и 20-м столбцах.)

Поскольку каждая вертикаль содержит 20 клеток, а вертикальная триминошка занимает 3 клетки одной вертикали, то числа $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4 + a_5, a_{16} + a_{17} + a_{18}, a_{17} + a_{18}, a_{18}$, которые равны количеству клеток доски принадлежащим горизонтальным триминошкам в 1-м, 2-м, ..., 18-м столбцах соответственно, должны давать остаток 2 от деления на 3, т.е иметь вид $3k + 2$. Раз $a_1 = 3k_1 + 2$ и $a_1 + a_2 = 3k_2 + 2$, то a_2 делится на 3, а $a_1 \geq 2$. Раз $a_1 + a_2 + a_3 = 3k_3 + 2$, то a_3 делится на 3. Раз $a_2 + a_3 + a_4 = 3k_4 + 2$, то a_4 дает остаток 2 от деления на 3. Продолжая так же, убеждаемся, что $a_i = 3k_i + 2$, если $i = 3m + 1$, и $a_i \vdots 3$ в противном случае. В частности $a_i \geq 2$ при $i = 3m + 1$, m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, а это как раз и означает, что в каждой из семи вертикальных полос 3×20 лежит не менее двух горизонтальных триминошек.

№ 5. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность ω с центром в точке *O*. Описанная окружность треугольника *AOC* пересекает вторично прямые *AB*, *BC*, *CD* и *DA* в точках *M*, *N*, *K* и *L* соответственно. Докажите, что прямые *MN*, *KL* и касательные, проведённые к ω в точках *A* и *C*, касаются одной окружности.

Решение: Будем следовать замечанию и обозначениям, указанным в решении этой задачи Центрального жюри Турнира (г.Москва, *см. соответствующий файл с решениями*). Рассмотрим вариант расположения точек *B*, *M* и *N* как на рис. 3, см. вариант 1) из указанного замечания. Представим одно из возможных решений для этого варианта, опирающееся на стандартные свойства и теоремы.

1) Сделаем дополнительные построения и введем обозначения, соответствующие расположению точек *D*, *K* и *L*, как на рис. 3.1 (который по сути продолжает рис. 3 из решения Центрального жюри, ***см. ниже***).

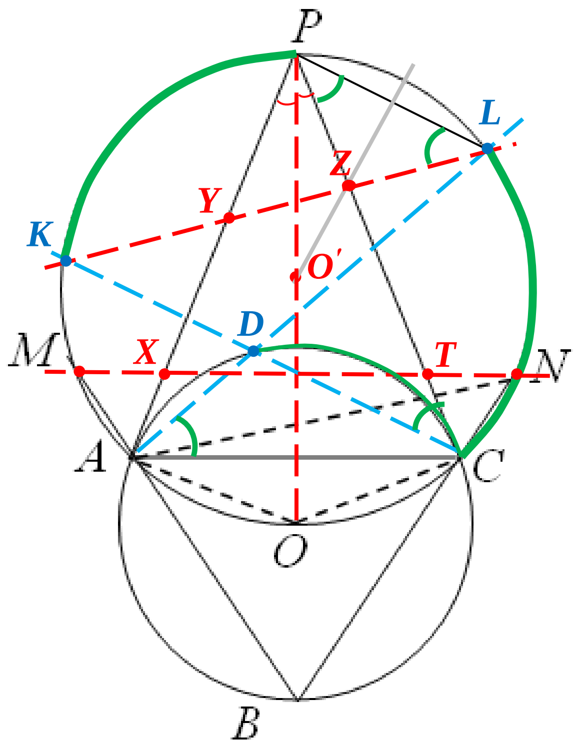

рис. 3.1

Как и в указанном решении касательные к окружности ω в точке A и C пересекаются в точке P. Тогда $AOCP$ – вписанный четырехугольник (углы при вершинах A и C – прямые), OP – диаметр описанной окружности Ω, причем AO = OC, как радиусы окружности ω, $PA = PC$, как отрезки касательных, значит, PO – биссектриса угла APC и, следовательно, все точки, лежащие на PO, в том числе центр этой окружности O' равноудалены от сторон угла PA и PC.

Обозначим вершины четырехугольника, получающегося при пересечении прямых AP, CP, KL и MN через X, Y, Z, T (см. рис. 3.1) и покажем, что все стороны этого четырехугольника равноудалены от некоторой точки (а именно от O'), что равносильно тому, что биссектрисы его углов пересекаются в точке O'. При этом нам полезными окажутся разные свойства вписанных углов, отрезков секущих и т.п., рассматриваемых для введенных двух окружностей.

2) Рассмотрим сначала биссектрису угла YZT и ее продолжение в противоположную сторону – как биссектрису угла Z в треугольнике PZL. Рассмотрев углы P и L этого треугольника, последовательно получим:

$$\angle L = {}^1\!/_2 \cdot \overset{\frown}{PK_\Omega} = \angle \mathrm{PCK} = {}^1\!/_2 \cdot \overset{\frown}{DC_\omega} = \angle \mathrm{DAC} = {}^1\!/_2 \cdot \overset{\frown}{LC_\Omega} = \angle P.$$

(здесь и ниже обозначения типа $\overset{\frown}{PK_\Omega}$ означают угловую величину дуги РК окружности Ω и т.д.). А это значит, что треугольник PZL – равнобедренный, и биссектриса его угла Z является серединным перпендикуляром к стороне PL – хорде окружности Ω, т.е. проходит через ее центр O'. Т.е. центр O' равноудален от сторон YZ и ZT рассматриваемого четырехугольника (и одновременно от стороны YX, ибо YX и ZT лежат на лучах PA и PC).

3) Покажем, что такая же ситуация имеет место с биссектрисой угла X в треугольнике AMX и четырехугольнике $XYZT$ (см. рис. 3.2).

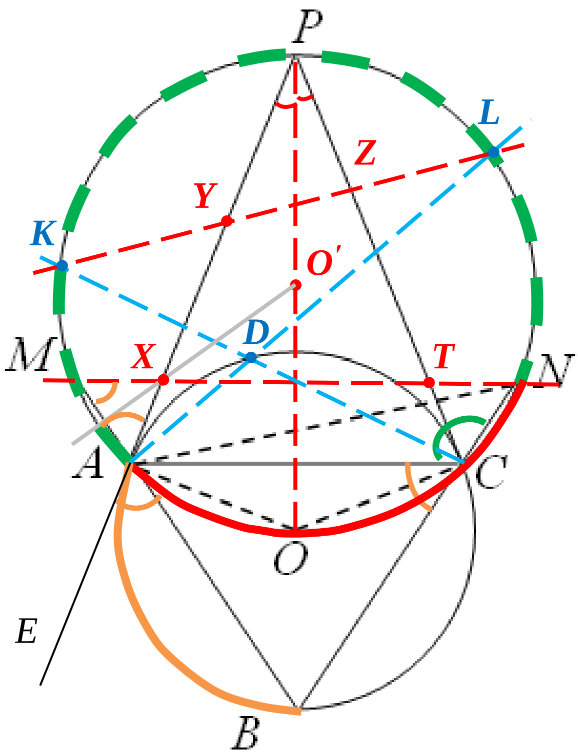

рис. 3.2

Действительно,

$$\angle MAX = \angle EAB(\text{как вертикальные}) = {}^1\!/_2 \cdot \overset{\frown}{\mathrm{BA}}_{\omega} = \angle \mathrm{BCA} = 180° - \angle \mathrm{ACN} =$$
$${}^1\!/_2 \cdot (360° - \overset{\frown}{APN}_{\Omega}) = {}^1\!/_2 \cdot \overset{\frown}{ACN}_{\Omega} = \angle \mathrm{AMN} = \angle \mathrm{AMX}.$$

Т.е. треугольник *AMX* – равнобедренный, и биссектриса его угла X является серединным перпендикуляром к стороне *MA* – хорде окружности Ω, т.е. проходит через центр O'. Т.е. центр O' равноудален от сторон *XT* и *XY* рассматриваемого четырехугольника (и одновременно от стороны *ZT*).

Что и требовалось доказать!

Примечания. Равенство углов *BCA* и *AMX* (или, что то же самое *BMX*) в последней части решения можно доказать и короче, опираясь на одно из классических доказательств свойства о равенстве произведений секущих, проведенных к окружности Ω из одной точки *B*: $BA \cdot BM = BC \cdot BN$, которое следует из подобия треугольников *BCA* и *BMN* и равенства их соответствующих углов *C* и *M*.

Предлагаем читателям самостоятельно рассмотреть другие варианты расположения точек на окружностях, указанные в замечании Центрального жюри.