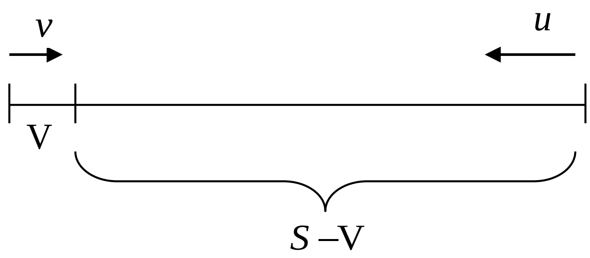
Предварительные решения задач
БАЗОВОГО варианта 6-7 класса 43-го ТурГор (6 марта 2022)

Примечание. См. решения задач № 1,2 и 4 среди решений соответствующих задач 8-9 класса (в решениях задач Центрального жюри Турнира).

№ 1. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один — медленно, другой — быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше — быстрого хозяина или медленного?

Ответ. Собаки вернутся одновременно.

Решение. Пусть скорость 1-го равна v, 2-го равна u, а скорость собак – ω, исходное расстояние между ними S. Тогда $v<u$; 1-й сближается с собакой со скоростью $v+\omega$ и время до встречи первого с собакой второго $t_1 = S\cdot\dfrac{1}{v+\omega}$.



При этом 1-й прошел путь $\mathrm{V} = vt_1 = S\cdot\dfrac{v}{v+\omega}$. Тогда 2-й вместе со своей собакой до их встречи прошли (пробежали) путь $2(S-\mathrm{V})$ с общей скоростью $(u+\omega)$. На это ушло время, равное

$$\frac{2(S-\Delta)}{u+\omega}=\frac{2S-2S\dfrac{v}{v+\omega}}{u+\omega}=2S\cdot\frac{1-\dfrac{v}{v+\omega}}{u+\omega}=2S\cdot\frac{v+\omega-v}{(u+\omega)(v+\omega)}=\frac{2S\cdot\omega}{(u+\omega)(v+\omega)}.$$

Аналогичный расчет будет для встречи 1-го со своей собакой; как видим время будет одинаково!

№ 2. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Ответ. Верно.

Доказательство. Пусть исходное число содержит в своем разложении на простые множители p двоек и k пятерок; тогда после $p-k$ домножений на 5 полученное число будет иметь в конце p нулей, а перед ними нечетную цифру. При следующем домножении на 5 последней цифрой станет 5-ка, которая будет сохраняться и при дальнейших домножениях.

№ 3. На острове живут два племени, в которых число рыцарей равны между собой и число лжецов равны между собой. Лжецы всегда лгут, а рыцари, всегда говорят правду. Однажды каждый из жителей этого острова заявил: «Количества друзей у меня в племенах равны» (т.е. число друзей каждого жителя в одном племени равно числу его друзей в другом племени). Может ли быть такое? Если да, то приведите пример, если нет, то объясните почему.

Ответ. может,

Решение. Пусть каждый рыцарь дружит со всеми лжецами в обоих племенах (их равные количества), а с рыцарями не дружит вообще. В то же время лжецы дружат только со своими соплеменниками, а с чужими – нет. Тогда условие задачи выполняется.

№ 4. На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Ответ. сможет,

Решение. Пронумеруем все монеты от 1 до 11. Пусть монеты № 1 – № 4 нужно проверить. Первым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю монеты с 3-й и 4-й. Если весы не уравновесились, то среди монет 1, 2, 3, 4 точно есть фальшивая.

Пусть весы оказались в равновесии. Тогда на двух чашах поровну фальшивых монет, т.е. среди 1-й, 2-й, 3-й, 4-й монет есть либо 0, либо 2, либо 4 фальшивые!

Вторым взвешиванием сравниваем монеты 1, 2, 3, 4 с монетами 5, 6, 7, 8. Если монеты 1, 2, 3, 4 настоящие, то они вместе тяжелее, чем монеты 5, 6, 7, 8 т.к. среди монет 5, 6, 7, 8 в этом случае точно есть фальшивая (это необходимое условие того, что монеты №1–№4 настоящие).

Покажем, что это условие (т.е. то, что монеты №1–№ 4 тяжелее) – является и достаточным для того, чтобы они были настоящими. Действительно, если (от противного) среди монет №1–№ 4 есть фальшивые, т.е. 2 или 4 фальшивые, то они будут либо равны, либо легче монет 5, 6, 7, 8, ибо среди последних будет не более двух фальшивых монет.

№ 5. Дана таблица $m \times n$ клеток (m и $n \geq 4$). Можно ли эту таблицу раскрасить в 4 цвета так, чтобы клетки каждого квадрата 2×2 в этой таблице были окрашены в каждый из четырёх цветов (каждая клетка в свой цвет), и чтобы в каждом столбце и в каждой строке клетки были раскрашены:

а) ровно в 2 различных цвета?

б) ровно в 4 различных цвета?

Ответ. а) можно, б) нельзя.

Решение. а) Пусть наши 4 цвета – a, b, c и d. Пример для таблицы 4×4 см. на рис.

a	b	a	b
c	d	c	d
a	b	a	b
c	d	c	d

б) Докажем, что в 4 цвета раскрасить таблицу не получится. Пусть вновь наши 4 цвета – a, b, c и d. Левый верхний квадрат 2×2 должент быть раскрашен в 4 цвета и, не теряя общности можно опять раскрасить так, как указано на рис. ниже в желтом квадратике:

a	b	a	
c	d	c	

В третий столбец нужно опять ставить цвета a и c, и, если поставить так как показано на вышеприведнном рисунке, сохраняя периодичность цветов, но тогда в каждой строчке будет по два разных цвета. Либо с какого-то момента поменять цвета a и c местами, см. ниже.

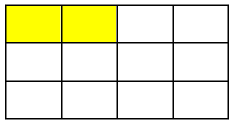
Рассмотрим следующую таблицу 4×4 и докажем, что раскрасить с соблюдением данного условия невозможно. Пусть, не ограничивая общности рассуждений, первая строка окрашена в три цвета так:

a	b	c	

Рассмотрим желтую клетку. В ней может стоять только цвет d, так как

a	b	c	

правее этой клетки может стоять только цвет a ввиду того, что в выделенном квадрате (см. рис. справа) должны стоять все 4 цвета и в столбце ниже b не может стоять цвет a. Тогда под цветом c стоит цвет a.



a	b	c	
c	d	a	

Рассмотрим третью сверху строчку. Аналогично сказанному выше, получим следующую раскраску

a	b	c	
c	d	a	
a	b	c	

И т.д. Заметим, что с соблюдением данного условия можно закрасить таблицу так, что в строках может получиться по 4 цвета, но тогда в столцах все равно будет только 2 цвета, см.пример на рис.

a	b	c	d	a	b
c	d	c	d	c	c
a	b	a	b	a	b
c	d	c	d	c	d
a	b	c	d	a	b