

Предварительные решения задач
СЛОЖНОГО варианта 6-7 класса 43-го ТурГор (20 марта 2022)

№ 1. Найдите все четырехзначные числа $\overline{abcd}$, для которых выполняется равенство $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2022$ (a, b, c, d не обязательно различные числа).

Ответ: 1821.

Решение. $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2022 \implies 1111a + 111b + 11c + d = 2022 \implies a=1,$

$111b + 11c + d = 911$, а так как $11c + d \leq 108$, то $803 \leq 111b \leq 911 \implies b=8,$

$11c + d = 23 \implies c=2, d=10$. **Имеем единственное число 1821.**

№ 2. Васе требуется расставить в некоторых клетках таблицы 2022×2022 крестики так, чтобы каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков сможет поставить Вася?

Ответ: 4042.

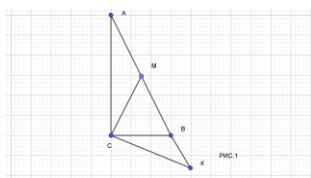
Решение. Докажем, что в таблице не может быть больше, чем 4042 крестиков. Действительно, количество крестиков, единственных в строке, не превышает количества строк, то есть, их не больше 2022. Если их – ровно 2022, то в каждой строке такой крестик есть, и тогда ни в какую из строк нельзя поставить еще крестик, поэтому, других крестиков в таблице быть не может. Аналогичное рассуждение можно провести, если имеется 2022 крестиков, единственных в столбце. Если же и тех и других имеется не более чем по 2021, то всего крестиков в таблице не больше, чем $2021 \cdot 2 = 4042$.

Такое количество крестиков, удовлетворяющих условию, поставить можно. Например, заполним крестиками одну строку и один столбец, исключая их пересечение.

№ 3. В прямоугольном треугольнике разность острых углов B и A равна α . Через вершину C перпендикулярно медиане CM проведена прямая до пересечения с прямой AB в точке K . Найти величину угла $СКВ$.

Ответ: $\angle СКВ = \alpha$.

Решение. Т.к. CM – медиана, то $\angle A = \angle ACM$, $\angle B = \angle MCB$. Но поскольку $\angle MCK = 90^\circ$, то $\angle BCK = \angle A$. $\angle CBA$ – внешний для треугольника CBK . Значит $\angle B = \angle BCK + \angle BKC$, т.е. $\angle BKC = \angle B - \angle A = \alpha$.



№ 4. А) В первой строке таблицы 15×2 записаны подряд все числа от 1 до 15. Можно ли заполнить вторую строку этой таблицы теми же числами от 1 до 15 в каком-нибудь порядке так, чтобы сумма двух чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

Б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 12 и таблицы 12×2 .

В) Тот же вопрос для чисел от 1 до 11 и таблицы 11×2 .

Ответ: А) и Б) – да, В) – нет.

Решение. А) Пример для 15 чисел:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Б) Пример для 12 чисел:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4

В) Покажем, что для 11 чисел расстановка невозможна. Очевидно, в 11-й столбец можно вписать только число 5, а число 11 можно вписать только в 5-й столбец (т.к. $9 < 11$ и $11 + 11 < 25$, т.е. 16 – единственный доступный квадрат). Аналогично, в 10-й столбец можно вписать только число 6, а число 10 можно вписать только в 6-й столбец. Продолжая таким образом, получаем следующую расстановку:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
				11	10	9		7	6	5

Но теперь никакое число нельзя поставить в четвертый столбец: $4+5=9$, но число 5 уже использовано, а $4 + 11 < 16$. Следовательно, расставить числа требуемым образом невозможно.

№ 5. А) В арифметическом выражении $2:3:5$ для указания порядка действий всеми возможными способами расставляются скобки и подсчитывается результат. Сколько различных значений при этом получится? Ответ поясните.

Б) Тот же вопрос для арифметического выражения $2:3:5:7:11:13:17:19$.

Ответ А) 2, Б) 64. (замечание: общий ответ, если в исходном выражении стоит n простых чисел, то различных значений выражения 2^{n-2}).

Решение. Если исходное выражение с различными расположениями скобок представлять в виде обыкновенных дробей, в числителе и в знаменателе которых будут стоять произведения некоторых простых чисел из исходного выражения, то число 2 всегда будет в знаменателе, а 3 – в числителе. Для дальнейшего важно понять и обосновать, что остальные простые числа могут располагаться в числителе и знаменателе во всех возможных комбинациях, т.е. для любого расположения простых чисел в числителе или знаменателе найдется соответствующая расстановка скобок. При этом количество способов расставить простые числа от 5 до 19 в числителе или знаменателе равно $2^6 = 64$ (каждое может занимать два положения).

Кроме этого, различные расстановки простых чисел в числителе и знаменателе гарантируют, что и значения соответствующих выражений будут различными.

А) Здесь достаточно привести примеры расположения скобок: $(2:3):5 = \frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$;

$$2:(3:5) = 2 : \frac{3}{5} = 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.$$

Б) Примеры пункта А) подсказывают идею, как искать “нужные” расположения скобок, чтобы менять расстановки простых чисел в числителе и знаменателе.

Например, в случае четырех простых чисел $2:3:5:7$, учитывая, что мы уже умеем расставлять скобки для трех простых чисел (см. пункт А)), нужно догадаться до следующих

расположений: $(2:3):(5:7) = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ и $2:(3:(5:7)) = 2 : \frac{3}{5/7} = 2 : \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{10}{21}$, (заметим, что в эти варианты получаются из А) заменой числа 5 на (5:7), и тогда простые числа 5 и 7 оказываются в разных частях дроби, а также:

$(2:3):5:7 = ((2:3):5):7 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{2}{105}$ и $2:((3:5):7) = 2 : \left(\left(\frac{3}{5} \right) : 7 \right) = 2 : \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} \right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3} = \frac{70}{3}$ (а эти варианты получаются из А) так, чтобы 5 и 7 были в одной и той же части дроби – либо в числителе, либо в знаменателе).

Используя и для последующих простых чисел аналогичные “индукционные” рассуждения, покажем, что каждое последующее простое число (не теряя общности, обозначим его q) при соответствующем расположении скобок будет попадать:

- либо в разные части дроби с предыдущим числом p (с помощью замены p на $(p:q)$),
- либо в одну и ту же часть дроби, что и предыдущее число p (тогда “последние внутренние скобки, охватывающие” выражение “ $(\dots : p)$ ” нужно дополнить делением на q и взять полученное таким образом выражение в отдельные скобки; ср. как это было сделано для 5 и 7, в частности, в случае выделенном синей заливкой).

Таким образом, добавление очередного простого числа удваивает количество различных значений рассматриваемых дробей.

№ 6. Знайка занялся изучением натуральных чисел и разбил их на множества, состоящие из чисел с одинаковой суммой цифр. Затем он в каждом множестве выделил наименьшее число и назвал его замечательным. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

Ответ: 5391.

Решение. Заметим, что среди трехзначных чисел замечательными являются те и только те числа, которые оканчиваются на 99.

Действительно, пусть трехзначное число N оканчивается на 99. Докажем, что оно замечательное. В любом меньшем числе на каждом месте стоит цифра не большая, чем в числе N , причем на каком-то месте стоит меньшая цифра либо первая цифра отсутствует (если число не трехзначное). Поэтому меньшие числа имеют меньшую сумму цифр, то есть число N – замечательное.

Теперь докажем, что других трехзначных замечательных чисел нет. Любое трехзначное число имеет сумму цифр не больше чем $9 \cdot 3 = 27$. Суммы цифр замечательных трехзначных чисел 199, 299, ..., 999, равны соответственно 19, 20, ..., 27. Все меньшие суммы цифр уже встречаются у однозначных или двузначных чисел. Поэтому если трехзначное число не оканчивается на 99, то оно не является замечательным.

Осталось подсчитать сумму трехзначных чисел, оканчивающихся на 99: $S = 199 + 299 + \dots + 999 = (200 + 300 + \dots + 1000) - 9 = (2 + 3 + \dots + 10)100 - 9 = 5391$.

№ 7. В однокруговом шахматном турнире участвовало 8 человек и в итоге все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие четвертое и пятое места? (В шахматах за победу начисляется 1 очко, за ничью – $\frac{1}{2}$ очка, за поражение – 0 очков.)

Ответ: выигрывает 4-й.

Решение основано на том, что последние 4 игрока между собой возьмут как минимум 6 очков, а второй больше 6 взять не может (ибо, если 1-й набрал 7 очков, то он выиграл у второго, а если 1-й набрал, 6,5, то все равно у второго 6 очков (ибо у всех разное). А это значит, что последние четыре игрока набрали ровно 6 очков, т.е. в партиях между собой, т.е. они проиграли все партии первым четверым, в частности, 5-й проиграл 4-му.