43-й Международный математический Турнир городов

2021/22 учебный год, весенний тур

Предварительные решения задач

Базовый вариант

8 – 9 классы

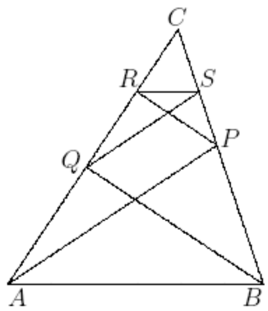
1. [3] Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один – медленно, другой – быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше – быстрого хозяина или медленного?

Александр Рубин

Ответ: собаки вернулись одновременно.

Решение 1. Пусть L – расстояние между людьми в момент, когда они отпустили собак, v и V – скорости людей ($V > v$), u – скорость собак. Собака медленного хозяина добежит до быстрого за время $\frac{L}{u+V}$ и за это время убежит от своего хозяина на расстояние $\frac{L(u-v)}{u+V}$, а вернется к нему за время $\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}$. Общее время её «путешествия» равно $\frac{L}{u+V}+\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}=\frac{2Lu}{(u+V)(u+v)}$. Тот же результат аналогично получится для другой собаки.

Решение 2. На рисунке на горизонтальной оси откладывается расстояние вдоль дорожки, а на вертикальной – время. Точки A и B соответствуют положениям хозяев (и их собак) в начальный момент, люди движутся в пространстве-времени по лучам AC и BC, а собаки – по ломаным APR и BQS. Поскольку скорости собак одинаковы, $AP \parallel QS$ и $BQ \parallel PR$. По теореме Фалеса $CQ : CA = CS : CP$ и $CR : CQ = CP : CB$, откуда $CR : CA = CS : CB$. Следовательно, $RS \parallel AB$, что и означает одновременность событий R и S.



Замечание. Знатоки могут сразу сослаться на вырожденный случай *теоремы Паппа*.

2. [4] Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Сергей Дориченко

Ответ: верно.

Решение. Запишем исходное число n в виде $2^k m$, где m нечётно. После умножения его на 5^l, где $l > k$, получим число $5^{l-k}m\cdot 10^k$, оканчивающееся на k нулей, перед которыми стоит пятёрка.

3. [5] На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

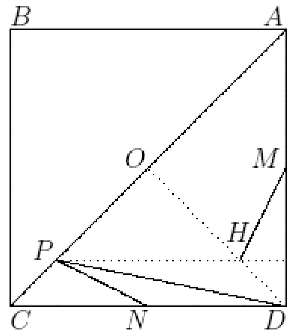
Ответ: сможет.

Решение. Пусть Буратино сначала положит на чаши по две свои монеты. Если одна из чаш перевесит, то среди его монет есть фальшивые.

В случае равновесия у Буратино могут быть 0, 2 или 4 фальшивые монеты. Теперь пусть на одну чашу он положит свои монеты, а на другую – 4 монеты Лисы. Если все монеты Буратино настоящие, его чаша перевесит (ведь настоящих монет только 7), в остальных случаях – нет, поскольку при этом у Лисы больше двух фальшивых монет быть не может.

4. [5] На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P. Пусть H – точка пересечения высот треугольника APD, M – середина AD и N – середина CD. Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны.

Иван Кухарчук



Решение. При одном из поворотов на 90° вокруг центра O квадрата точка A перейдёт в точку D, точка D – в точку C, а точка M – в точку N. Так как OPH – равнобедренный прямоугольный треугольник, H перейдёт в P. Значит, отрезок MH перейдёт в NP, поэтому они перпендикулярны.

Замечание. Если треугольник APD тупоугольный, точка H лежит вне его, что никак не сказывается на решении.

5. [6] Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

Алексей Глебов

Ответ: 14 рублей.

Решение. Пусть вертикальная сторона доски равна 20, а горизонтальная – 21.

Пример. Покажем, как Васе гарантированно получить не менее 14 рублей. Он разбивает доску на горизонтальные триминошки. Пусть количество Петиных горизонтальных триминошек, центр которых лежит в i-м столбце, равно a_i. Поскольку в столбце 20 клеток, а вертикальная триминошка покрывает три клетки, имеем: $a_{i-1} + a_i + a_{i+1} \equiv 2 \pmod 3$. Отсюда $a_{i+2} \equiv 2 - a_i - a_{i+1} \equiv a_{i-1} \pmod 3$. Так как по определению $a_0 = a_1 = 0$, то $a_2 \equiv 2 \pmod 3$, поэтому в каждом из столбцов 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 лежат центры хотя бы двух гори-зонтальных триминошек Пети. Они совпадут с Васиными, что даст ему не менее 14 рублей.

Оценка. Можно считать, что Петя знает Васино разбиение. В верхних двух строках Петя расположит горизонтальные триминошки, которые могут дать Васе не более 14 совпадений. Оставшуюся доску Петя разделит на квадраты 3×3. Если в какой-то квадрат полностью входит Васина горизонтальная триминошка, то Петя разобьёт его на вертикальные триминошки, иначе – на горизонтальные. В любом случае в этом квадрате не будет совпадений.

10 – 11 классы

1. [4] Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали k умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных k чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно k раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи.

Александр Грибалко

Решение. Пусть исходное число равно n. В качестве искомого числа годится $5^k n$. Действительно, последовательно умножая его на двойки, получим числа $5^{k-1}\cdot 10n$, $5^{k-2}\cdot 10^2 n$, ..., $10^k n$, которые отличаются от чисел $5^{k-1}n$, $5^{k-2}n$, ..., n только наличием нескольких нулей в конце и поэтому не содержат семёрок.

2. [4] На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

Ответ. Сможет.

Решение 1. Пусть сначала Буратино сравнит три свои монеты с тремя монетами Алисы. Если его чаша окажется легче, то у него есть фальшивые монеты. В случае равновесия – тоже есть, поскольку настоящих монет всего пять.

Пусть чаша Буратино тяжелее (то есть на чаше Алисы фальшивых монет больше). Тогда он заменит две монеты с чаши Алисы на ещё неиспользованные. Если и теперь чаша Буратино перевесит, то все монеты у него настоящие: иначе оба раза на чаше Алисы было по две фальшивые монеты, что невозможно. В противном случае, как показано выше, какие-то из монет Буратино фальшивые.

Решение 2. Достаточно использовать только три монеты (a, b, c) Буратино и одну монету (d) Лисы. Сначала Буратино сравнит c с d. Если $c < d$, то монета c фальшивая.

В противном случае он сравнит $a + b$ с $c + d$. Если при первом взвешивании $c > d$, то монета c настоящая, а d фальшивая. Тогда Буратино устраивает только результат $a + b > c + d$. Если же $c = d$, то Буратино устраивает только результат $a + b = c + d$ (поскольку четырёх фальшивых монет нет).

3. [5] Пусть n – натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ *интересной*, если для каждого $i = 1, 2, ..., n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовём интересную последовательность *чётной*, если сумма её членов чётна, и *нечётной* – иначе. Для каждой нечётной интересной последовательности нашли произведение её чисел и записали его на первый листок. Для каждой чётной – сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от n.)

Алексей Глебов

Ответ: при $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ сумма на втором листке больше на 1, при остальных n – наоборот. Иными словами, больше на 1 та сумма, где присутствует слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n + 1)$.

Решение 1. Обозначив сумму, содержащую слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n + 1)$, через A_n, а другую – через B_n, докажем равенство $A_n - B_n = 1$ по индукции. *База.* $A_1 - B_1 = 2 - 1 = 1$.

Шаг индукции. Представим сумму A_n в виде $A' + A''$, где A' содержит все слагаемые вида $a_1a_2...a_{n-1}(n + 1)$, а A'' – все слагаемые вида $a_1a_2...a_{n-1}n$. Так как сумма A' содержит слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n(n + 1)$, то для каждого её слагаемого $a_1a_2...a_{n-1}(n + 1)$ последовательность $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ имеет ту же чётность, что и последовательность 2, 3, ..., n. Следовательно, $A' = (n + 1)A_{n-1}$. Соответственно, в сумме A'' для каждого её слагаемого $a_1a_2...a_{n-1}n$ чётность последовательности $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ противоположна чётности последовательности 2, 3, ..., n. Тогда $A'' = nB_{n-1}$, откуда $A_n = A' + A'' = (n + 1)A_{n-1} + nB_{n-1}$. Аналогично, $B_n = nA_{n-1} + (n + 1)B_{n-1}$.

В результате получаем: $A_n - B_n = (n + 1)A_{n-1} + nB_{n-1} - nA_{n-1} - (n + 1)B_{n-1} = A_{n-1} - B_{n-1} = 1$.

Решение 2. Рассмотрим равенство $1 = (2 - 1)(3 - 2)...(n - (n - 1))((n + 1) - n)$.

Раскрыв все скобки в правой части, получим сумму из 2^n слагаемых со знаками плюс и минус, каждое из которых является произведением n чисел: по одному числу из каждой скобки. Так как в i-й скобке выбирается число $i + 1$ или $-i$, то каждое слагаемое по модулю равно произведению чисел какой-то интересной последовательности, при этом слагаемое входит в сумму со знаком плюс, если множитель $-i$ выбирается в чётном числе скобок, и со знаком минус, если в нечётном. Значит, произведения тех интересных последовательностей, которые имеют ту же чётность, что и последовательность 2, 3, ..., n, $n + 1$, входят в сумму со знаком плюс, а произведения интересных последовательностей противоположной чётности входят в сумму со знаком минус. Отсюда следует искомое равенство.

4. [5] См. задачу 5 младших классов

5. [6] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AOC пересекает вторично прямые AB, BC, CD и DA в точках M, N, K и L соответственно. Докажите, что прямые MN, KL и касательные, проведённые к ω в точках A и C, касаются одной окружности.

Азамат Марданов

Решение. Пусть Ω – описанная окружность треугольника AOC. Напомним, что ориентированным углом $\angle(l,\ m)$ между прямыми l и m называется угол, на который надо повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна m (этот угол определён по модулю 180°).

Пусть касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P, которая, очевидно, лежит на окружности Ω. Так как PA – касательная, то $\angle(PA,\ AB) = \angle(AC,\ CB)$, то есть $\angle(PA,\ AM) = \angle(AC,\ CN)$. Значит, ориентированные дуги PM и AN равны, откуда равны хорды PA и MN. Аналогично, $PA = KL$. Равенство $PA = PC$ очевидно. Следовательно, хорды MN, KL, PA и PC равноудалены от центра окружности Ω, что и требовалось.

Замечание. Приведённое решение не требует разбора различных вариантов расположения точек на окружностях. При более традиционном решении даже при оговорке, что достаточно рассматривать случай, когда точка B лежит на бóльшей дуге AC (рис. 1), что позволяет избежать рассмотрения различных вариантов расположения точек D, K и L (рис. 2), придётся рассматривать как минимум три варианта расположения точки B:

1) точки M и N лежат на дуге APC (рис. 3);

2) точки M и N лежат на дуге AOC (рис. 4);

3) одна из точек M, N лежит на дуге AOC, а другая – нет (рис. 5).

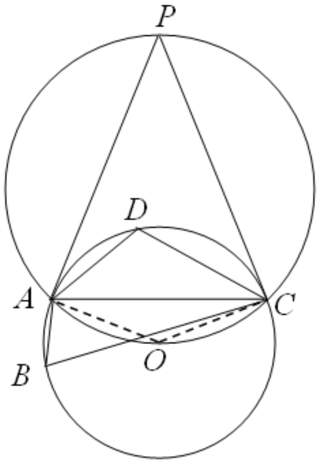


Рис. 1

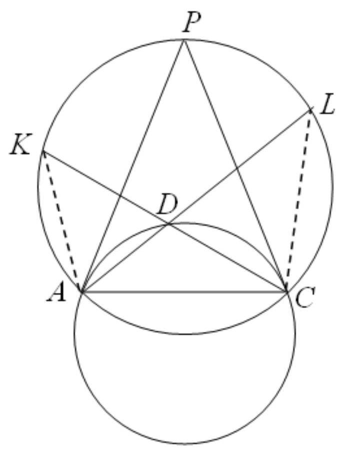


Рис. 2

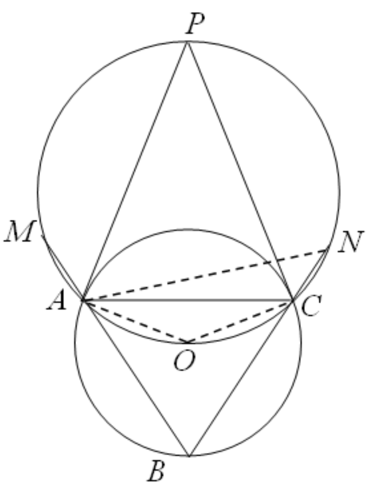


Рис. 3

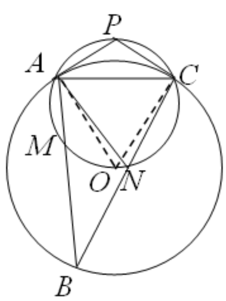


Рис. 4

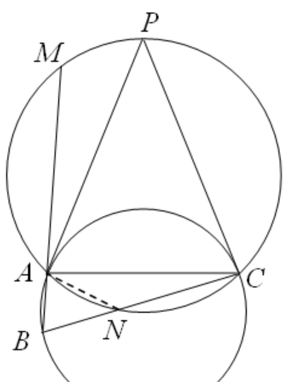


Рис. 5

Сложный вариант

8 – 9 классы

1. [4] Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p, большего 2 и меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

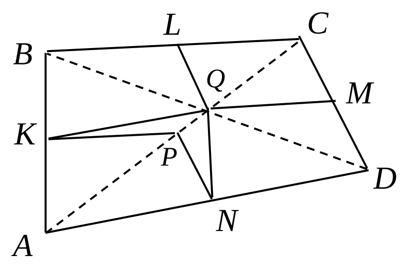
Ответ: $n = 10$.

Решение. При $n > 10$ одно из чисел $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$ кратно 3 и больше 3, поэтому n не больше 10. Число $n = 10$ подходит, так как числа $10 - 3 = 7$, $10 - 5 = 5$ и $10 - 7 = 3$ простые.

2. [7] Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера.

Александр Юран

Решение. Можно считать, что в четырёхугольнике $ABCD$ и сумма углов A и B, и сумма углов A и D не больше 180°. Пусть K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, а P и Q – середины диагоналей AC и BD соответственно. Тогда $AKPN$, $KBLQ$ и $NQMD$ – копии $ABCD$, а условие на углы обеспечивает то, что четырёхугольник $AKPN$ не пересекается ни с $KBLQ$, ни с $NQMD$, а четырёхугольники $KBLQ$ и $NQMD$ не пересекаются друг с другом, так как расположены по разные стороны от диагонали AC.



3. [7] Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, ..., $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

Ответ: 4.

Решение.

Пример. При $n = 34$, получаем первые цифры 3, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.

Оценка. Поделим n на такую степень десятки, чтобы для полученного числа m (не обязательно целого) выполнялись неравенства $1 \le m < 10$, и решим задачу для числа m (первые цифры не изменятся).

Среди чисел km есть несколько чисел, меньших 10, и несколько тех, что больше 10. Назовем «местом перескока» то наименьшее k, для которого $km \ge 10$.

Из неравенств $1 \le m < 10$ следует, что все первые цифры до перескока – разные, тогда как первые цифры после перескока могут совпадать, но все они идут подряд: 1, 2, 3 и т.д. Поэтому:

Если $1 \le m < 2{,}5$, то имеется по меньшей мере 4 числа до перескока, и все они имеют разные первые цифры. Если $2{,}5 \le m < 10/3$, то имеется, как минимум, три разные цифры до перескока (причем они не меньше 2), а также цифра 1 (после перескока), то есть опять не менее 4.

Если $10/3 \le m < 4$, то имеется не менее двух цифр до перескока (причем они больше 2), а также цифры 1 и 2 после перескока.

Наконец, если $m \ge 4$, то имеются, во всяком случае цифры 1, 2 3 после перескока и еще одна цифра (не меньше 4) до перескока.

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток – *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

а) [5] Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали, и по вертикали.

б) [5] Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали – средняя и по вертикали?

Борис Френкин

а) Решение. Запишем в каждую клетку, среднюю по вертикали, букву В, а в каждую клетку, среднюю по горизонтали, – букву Г. Выбросим все горизонтали и все вертикали без чёрных клеток. Теперь в каждой вертикали есть клетка с В. Все эти клетки стоят в разных горизонталях, поэтому горизонталей не меньше, чем вертикалей. Аналогично вертикалей не меньше, чем горизонталей, то есть их поровну. Значит, в каждой вертикали есть клетка с Г. Рассмотрим клетку с Г в самой левой вертикали. Очевидно, в горизонтали, где она стоит, ровно одна чёрная клетка. Но в этой горизонтали есть также клетка с В, следовательно, она совпадает с этой единственной чёрной клеткой.

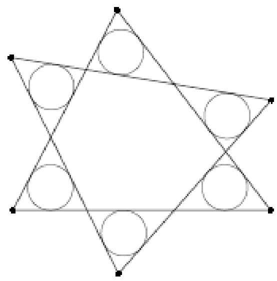
б) Ответ: не обязательно.

Решение. На рисунке приведены примеры для квадратов 6×6 и 7×7 (обозначения: В – клетка, средняя по вертикали, Г – по горизонтали, О – и по вертикали, и по горизонтали). Добавив нужное количество белых строк и столбцов, получим квадрат 100×100.

				О	
		Г	В		
					О
О					
		В	Г		
	О				

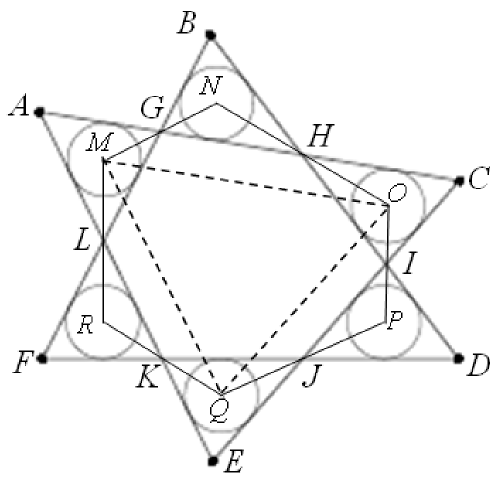
				О		
	Г				В	
О						
			О			
						О
	В				Г	
		О				

5. [10] Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



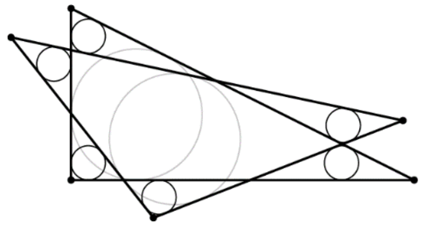
Андрей Кушнир

Решение. Обозначим точки, как на рисунке. Пусть r – радиус вписанной окружности маленького треугольника, $2p$ – периметр шестиугольника $GHIJKL$, S – площадь шестиугольника $MNOPQR$. Заметим, что радиус вписанной окружности треугольника MOQ на r меньше радиуса вписанной окружности треугольника ACE. То же верно для треугольников NPR и BDF. Поэтому достаточно доказать равенство радиусов вписанных окружностей треугольников MOQ и NPR. Для этого достаточно доказать равенство их периметров и площадей.



Заметим, что $GH + IJ + KL = HI + JK + LG = p$ (поскольку касательные из каждой вершины шестиугольника $GHIJKL$ к двум «соседним» с этой вершиной маленьким окружностям равны). Так как GH – средняя линия треугольника MNO и т.д., периметр треугольника MOQ равен $2p$. Кроме того, $S_{MNO} = ½\ MO \cdot 2r = MO \cdot r$, и т.д., значит, $S_{MOQ} = S - 2pr$. То же верно для треугольника NPR.

Замечание. Исходные треугольники не обязательно равны между собой, а вписанные в них окружности не обязательно совпадают, см. рисунок справа.



6. [10] Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной – имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая – только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

Ответ. Можно.

Решение 1. Положим на чаши по 3 золотые и 3 серебряные медали.

1) Весы в равновесии. Тогда все медали на весах стандартные. Подозрительными остались одна золотая, одна серебряная и 7 бронзовых медалей. Положим на чаши по 3 бронзовых медали.

1-1) Весы в равновесии. Подозрительными остались 3 монеты – по одной каждого сорта. Положим на левую чашу подозрительные золотую и бронзовую медали, а на правую – такие же стандартные. Если весы в равновесии, нестандартная медаль серебряная, если перевесит левая чаша – бронзовая, если правая – золотая.

1-2) Одна из чаш перевесила. Тогда нестандартная медаль – одна из трёх бронзовых на более легкой чаше. Стандартным способом за одно взвешивание найдём нестандартную.

2) Одна из чаш перевесила. Тогда подозрительными остались 9 медалей: 3 золотые с более лёгкой чаши и 6 серебряных: 3 «тяжёлые» и 3 «лёгкие». Положим на чаши по одной подозрительной золотой медали, одной серебряной «лёгкой» и одной серебряной «тяжёлой».

2-1) Весы в равновесии. Тогда подозрительными остались три медали из девяти, не участвовавшие в этом взвешивании: одна золотая, одна «лёгкая» и одна «тяжёлая».

Положим на левую чашу «лёгкую» и «тяжёлую» подозрительные медали, а на правую – две стандартных серебряных. Если весы в равновесии, нестандартна золотая медаль; если перевесила левая чаша – «тяжелая», если правая – «легкая».

2-2) Одна из чаш перевесила. Тогда подозрительными снова остались три медали: «тяжёлая» с этой чаши, а также «лёгкая» и золотая с другой. Далее действуем, как в 2-1).

Решение 2. Первым взвешиванием сравним З, З, С, С, Б, Б, Б и З, З, С, С, Б, Б, Б.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда под подозрением 2 золотые и 2 серебряные медали с лёгкой чаши, а также 3 бронзовые и 2 серебряные медали с тяжёлой: З, З, Сл, Сл, Б, Б, Б, Ст, Ст.

Вторым взвешиванием сравним З, Ст, Б и З, Ст, Б.

В случае неравенства под подозрением монета З с лёгкой чаши, а также монеты Ст и Б с тяжёлой. Тогда на первую чашу кладём эти З и Б, а на другую – настоящие золотую и бронзовую монеты: если первая чаша легче, то нестандартная З, если тяжелее – то Б, иначе – Ст.

В случае равновесия под подозрением оставшиеся Сл, Сл и Б. Третьим взвешиванием сравниваем две Сл (при неравенстве нестандартна та, что легче, при равенстве – оставшаяся Б).

2) Весы в равновесии. Тогда под подозрением оставшиеся медали: З, З, З, Б, С, С, С.

Возьмём по стандартной медали каждого вида (Зс, Сс, Бс) и сравним З, Зс, С, Бс и З, З, Сс, Б.

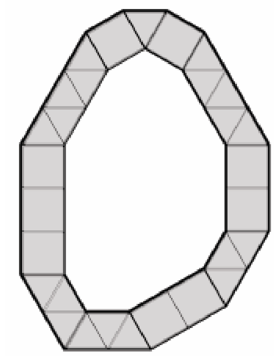
Если первая чаша легче, то под подозрением З и С с этой чаши и Б с другой. Этот случай разобран выше.

Если вторая чаша легче, то под подозрением две золотые медали с этой чаши и серебряная с другой. Третьим взвешиванием сравним эти две золотые.

Если же чаши в равновесии, то под подозрением оставшиеся две серебряные медали; сравним одну из них со стандартной.

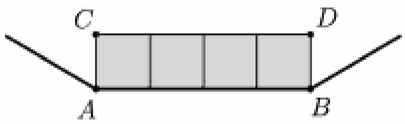
7. [12] На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p - 1$. (*Н. Белухов*)

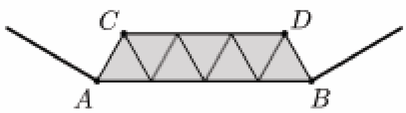
Решение. Заметим, что угол многоугольника M может быть равен 60°, 90°, 120°, 150°. Значит, каждый внешний угол M не меньше 30°. Поскольку сумма внешних углов многоугольника равна 360°, у M не более 12 углов, причём их может быть 12 только в случае, когда все углы равны по 150°. Если у M меньше 12 сторон, то не все его углы равны 150°. Мысленно вставим несколько сторон нулевой длины: если есть угол 120°, вставим в соответствующую вершину сторону нулевой длины, если есть угол 90° (60°), – две (три) последовательные стороны нулевой длины. В итоге получится 12 сторон, некоторые из которых равны 0. Назовём *характеристикой* многоугольника M набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ длин его сторон, перечисленных в порядке обхода против часовой стрелки от фиксированной вершины. Стороны $a_1, a_3, \ldots, a_{11}$ будем называть *нечётными*, а стороны $a_2, a_4, \ldots, a_{12}$ – *чётными*.



Назовём *каёмкой* разбиения объединение *плашек* (квадратов и равносторонних треугольников), имеющих хотя бы одну общую точку с границей многоугольника M. (см. рис.). Если каемка не совпадает с M, обозначим через M_1 многоугольник, полученный из M отбрасыванием каёмки.

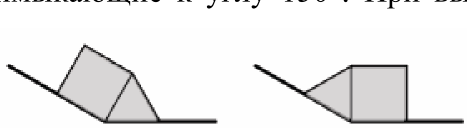
Рассмотрим плашку каёмки, примыкающую к углу, сторона которой лежит на стороне AB многоугольника M. Если это квадрат, то все плашки, примыкающие к AB – тоже квадраты (образующиеся углы в 90° можно замостить только квадратами; рис. слева). Если это треугольник, то все оставшиеся плашки, примыкающие к этой стороне – тоже треугольники (рис. справа). Таким образом, к каждой стороне многоугольника M примыкают либо только квадраты, либо только треугольники.



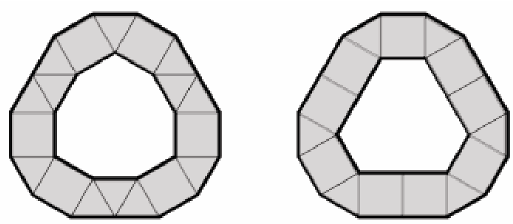


Отсюда следует, что стороны M_1 будут параллельны соответствующим сторонам M (стороны AB и CD на рисунках). Если у M нет углов по 60° или 90°, то длины сторон M_1 будут либо равны соответствующим длинам сторон M (в случае квадратов), либо на единицу меньше (в случае треугольников). При этом длина стороны M_1 может стать равной 0. Таким образом, M_1 – выпуклый многоугольник, у которого сторон не больше, чем у M. Многоугольник M_1 также имеет характеристику – набор, построенный по тем же правилам так, чтобы нумерации сторон в M и M_1 соответствовали друг другу.

Пусть длины всех сторон M отличны от нуля, то есть все углы M равны 150°. Существует два варианта расположить квадрат и треугольник, примыкающие к углу 150°. При выборе одного из вариантов остальная каёмка восстанавливается однозначно (сначала восстанавливается часть каёмки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т.д.).



Итого получается два варианта каёмки: треугольники расположены вдоль всех нечётных сторон, а квадраты – вдоль всех чётных; или наоборот. В первом варианте характеристикой M_1 будет набор $(a_1 - 1, a_2, a_3 - 1, a_4, \ldots, a_{11} - 1, a_{12})$, во втором – набор $(a_1, a_2 - 1, a_3, a_4 - 1, \ldots, a_{11}, a_{12} - 1)$.



Пусть по крайней мере одна нечётная сторона M равна 0, а все чётные стороны отличны от нуля. Рассмотрим такое i, что $a_i = 0$. Тогда угол при соответствующей вершине в многоугольнике M будет равен 120° (поскольку a_{i-1} и a_{i+1} не равны 0), то есть его единственным образом можно разбить на два треугольника. Далее каёмка восстанавливается однозначно: вдоль всех чётных сторон лежат треугольники, а вдоль всех нечётных сторон ненулевой длины – квадраты. Характеристика M_1 будет равна $(a_1, a_2 - 1, a_3, a_4 - 1, \ldots, a_{11}, a_{12} - 1)$.

Если хоть одна чётная сторона M равна нулю, а все нечётные стороны отличны от нуля, аналогично получим, что характеристика M_1 будет равна $(a_1 - 1, a_2, a_3 - 1, a_4, \ldots, a_{11} - 1, a_{12})$.

Если же по крайней мере одна чётная и одна нечётная сторона M равны нулю, то каёмка тем более восстанавливается однозначно. Поскольку все ненулевые стороны M_1 параллельны соответствующим сторонам M и имеют такую же или меньшую длину, то по крайне мере одна чётная и одна нечётная стороны M_1 равны нулю. Значит, и следующая каёмка восстанавливается (не более чем) однозначно, и так далее.

Обозначим $m = \min\{a_1, a_3, \ldots, a_{11}\}$, $n = \min\{a_2, a_4, \ldots, a_{12}\}$. Одно из чисел m или n отлично от нуля, иначе M можно разбить не более чем одним способом. Выделим у многоугольника M каёмку, уменьшающую либо чётные, либо нечётные стороны M (если одно из чисел m или n равно 0, то каёмку можно выбрать единственным способом). Уберём каёмку, останется многоугольник M_1. Выделим какую-нибудь каёмку многоугольника M_1, уберём её и обозначим оставшийся многоугольник через M_2. Будем продолжать так до тех пор, пока хотя бы одна чётная и хотя бы одна нечётная стороны станут равны нулю. В этот момент характеристика многоугольника будет равна $(a_1 - m, a_2 - n, a_3 - m, a_4 - n, \ldots, a_{11} - m, a_{12} - n)$.

Оставшийся многоугольник M_{m+n} не зависит от того, какие именно каёмки были выбраны на предыдущих шагах, поскольку такая характеристика задаёт не более одного многоугольника. Поэтому M_{m+n} можно разбить на плашки (иначе и M нельзя было разбить), причём единственным образом. Следовательно, количество разбиений M равно количеству способов уменьшить оба числа m и n до 0 (за ход уменьшая одно из чисел на 1), то есть C_{m+n}^{m}.

По условию C_{m+n}^{m} – простое число p. Заметим, что $m + n \geq p$ – иначе C_{m+n}^{m} не делится на p. Также m и n отличны от нуля, иначе $C_{m+n}^{m} = 1$. Значит, $C_{m+n}^{m} \geq C_{m+n}^{1} = m + n \geq p$. Равенство достигается только для $\{m, n\} = \{1, p - 1\}$. В обоих случаях одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ равно $p - 1$.

10 – 11 классы

1. [5] См. задачу 3 младших классов.

2. В прямоугольной системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график функции $y = f(x)$. Затем ось ординат и все отметки на оси абсцисс стёрли. Предложите способ, как с помощью карандаша, циркуля и линейки восстановить ось ординат, если

а) [4] $f(x) = 3^x$;

б) [4] $f(x) = \log_a x$, где $a > 1$ – неизвестное число.

Михаил Евдокимов

Решение. **а**) Пусть какая-то прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает график $y = 3^x$ в точке A, а B – проекция этой точки на ось абсцисс. Проведём прямую, параллельную оси абсцисс, на расстоянии $3AB$ от неё и найдём точку C её пересечения с графиком и проекцию D этой точки на ось абсцисс. Тогда $BD = 1$. Прямая, параллельная оси абсцисс и находящаяся от неё на расстоянии 1, пересекает график в точке, лежащей на оси ординат.

б) Пусть график $y = \log_a x$ пересекает ось абсцисс в точке K. Проведём в верхней полуплоскости прямые l и m, параллельные оси абсцисс, так, чтобы расстояние между l и m равнялось расстоянию от l до оси абсцисс. Пусть $A(x, 0)$ и $B(x^2, 0)$ – проекции на ось абсцисс точек пересечения этих прямых с графиком. Тогда $KA = x - 1$, $KB = x^2 - 1$, $AB = x^2 - x$,

$AB – KA = x^2 – 2x + 1 = (x – 1)^2$, поэтому, используя теорему Фалеса, можно построить отрезок длины $\frac{(x^2-x)(x-1)}{(x-1)^2} = x$. Отложив этот отрезок «влево» от точки A, получим начало координат.

3. [8] См. задачу 5 младших классов.

4. [8] По доске $n\times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причём каждый её ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M – наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Борис Френкин

Ответ: $2n – 1$.

Решение. *Пример.* Пусть ладья прошла «змейкой»: сначала по всей нижней горизонтали, потом по следующей (в обратную сторону) и т.д. Наибольшая разность номеров соседних клеток достигается между клетками $2n$ и 1, $3n$ и $n + 1$ и т.д.

Оценка. *Первый способ.* Предположим противное: $M < 2n – 1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2n–2$, ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь, чтобы достичь нижней строки, надо сделать минимум $n – 1$ ход, и чтобы вернуться – тоже минимум $n – 1$, плюс ещё хотя бы один ход сделать собственно в нижней строке).

Тогда все числа в верхней строке ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа в нижней строке ладья обошла, не заходя в верхнюю строку. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше), чем числа в нижней строке.

Аналогично, все числа в левом столбце больше (или все меньше) чисел правого столбца.

Не теряя общности, пусть числа левого столбце больше чисел правого, и числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим два числа – в левом верхнем углу (число A) и в правом нижнем (число B). С одной стороны, $A > B$ (по столбцам), с другой стороны, $A < B$ (по строкам). Противоречие.

Второй способ. Надо доказать, что найдутся номера соседних клеток, разность которых не меньше $2n – 1$. Пусть доска – это квадрат $ABCD$, этими же буквами обозначим номера соответствующих угловых клеток. Можно считать, что A – наименьший из угловых номеров, а $B < D$. Все клетки при стороне AD разобьются на два непустых множества, в одном номера меньше B, а в другом – больше. Найдётся пара соседних по стороне клеток из разных множеств, пусть их номера $X < Y$. Ладье понадобился хотя бы $n – 1$ ход, чтобы добраться от X до стороны BC, хотя бы один ход вдоль BC и ещё не менее $n – 1$ хода, чтобы дойти до Y. Следовательно, $Y – X \geq 2n – 1$.

5. [8] Дан приведённый многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0, 1)$?

Алексей Канель-Белов

Ответ: 2021 корень.

Решение. *Оценка*. Модуль произведения корней – целое число (свободный коэффициент многочлена), поэтому хотя бы один корень по модулю не меньше 1.

Пример. Выберем рациональные числа $0 = b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < ... < a_{2021} < b_{2021} = 1$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x – a_1)(x – a_2)...(x – a_{2021})$; его коэффициенты рациональны, пусть k – произведение их знаменателей. Числа $Q(b_0)$, $Q(b_1)$, ..., $Q(b_{2021})$ знакочередуются, пусть m – минимум их модулей. Выберем натуральное n, которое кратно k и больше $^1/_m$. Приведённый многочлен $P(x) = x^{2022} + nQ(x)$ искомый. Действительно, все его коэффициенты целые; знаки чисел $P(b_i)$ и $Q(b_i)$ совпадают, поэтому $P(x)$ имеет корень на каждом из интервалов (b_i, b_{i+1}) при i от 0 до 2020, то есть 2021 корень на интервале $(0, 1)$.

6. [8] Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

Александр Грибалко

Ответ: могут.

Решение. Поскольку 300 = 0 + 1 + 2 + ... + 24, один из цветов не использован, другой использован один раз, ..., последний – 24 раза. Занумеруем цвета числами от 0 до 24 и рассмотрим перестановку $(c_0, c_1, ..., c_{24})$ чисел $(0, 1, ..., 24)$, где c_i – номер цвета, который встречается i раз. Каждый мудрец, на котором надет колпак цвета c_i, знает перестановку с точностью до замены c_i на c_{i-1}, (шапки обоих цветов он видит в количестве $i - 1$). Эти две перестановки отличаются чётностью.

Изначально мудрецы делятся на две равные группы: «чётных» и «нечётных». «Четные» мудрецы называют свой цвет так, чтобы перестановка получилась чётной, а «нечётные» – чтобы она получилась нечётной. В результате ровно половина мудрецов восстановит правильную перестановку, то есть правильно назовёт свой цвет.

7. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной

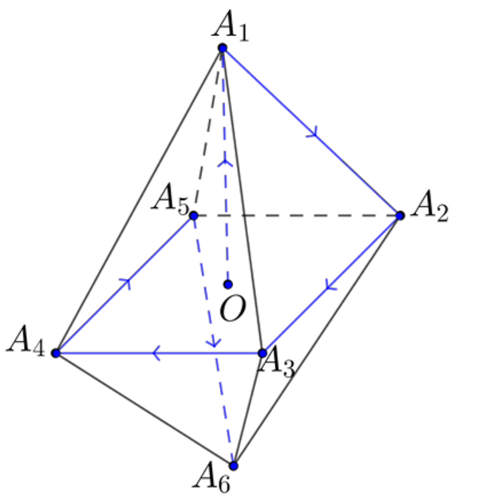
а) [6] не более $14a$; **б**) [6] не более $13a$?

Михаил Евдокимов

Ответ: может.

Решение. **а**) Пусть корабль находится в некоторой точке O. Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O. Объём пирамиды $OA_1A_2A_3$ можно найти двумя способами:

$$V_{OA_1A_2A_3} = \frac{1}{6}(OA_1)^3 = \frac{1}{3}aS_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}OA_1)^2,$$



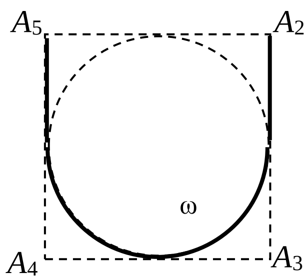
откуда $OA = \sqrt{3}a$, а длина ребра октаэдра равна $\sqrt{6}a$.

Докажем, что путь $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ позволит достигнуть граничной плоскости.

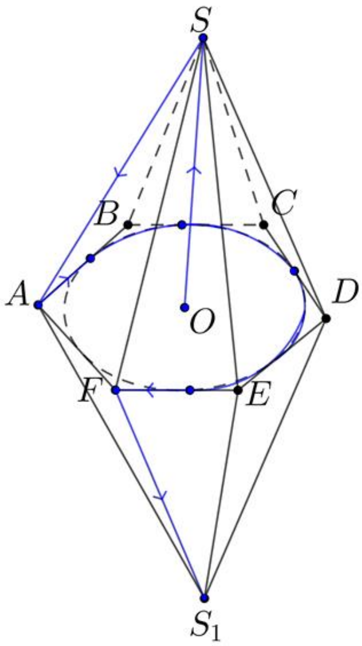
Пусть это не так. Тогда вершины октаэдра, а значит, и сам октаэдр (выпуклая оболочка его вершин), лежат строго внутри полупространства. Тем более там лежит шар радиуса a, вписанный в октаэдр, что противоречит условию.

Длина указанного пути равна $(\sqrt{3}+5\sqrt{6})a < 14a$ (поскольку $30\sqrt{2} < 43$).

б) Заменим участок пути $A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$ из п. а) на путь, приведённый справа (половина стороны квадрата, полуокружность, половина стороны квадрата). При этом длина пути сократится на $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{6}a > a$. Выпуклая оболочка точек нового пути всё ещё содержит вписанный в октаэдр шар радиуса a, поскольку этот шар касается образующей конуса с вершиной A_1, основанием которого является вписанная окружность ω квадрата $A_2A_3A_4A_5$.



Замечание. Можно сократить путь примерно до $12{,}75a$, если в плоскости квадрата $A_2A_3A_4A_5$ рассмотреть правильный шестиугольник $ABCDEF$, описанный вокруг окружности ω. Пройдём по отрезку OA_1, затем по прямой до вершины A шестиугольника, по касательной до точки его касания с ω, по дуге окружности ω, по касательной к ω до точки F , наконец по отрезку FA_6. Можно ещё немного сократить путь, если изменить расстояние от точек A_1 и A_6 до плоскости окружности ω и путь в этой плоскости так, чтобы объединение двух соответствующих конусов содержало шар с центром в O радиуса a. Однако улучшение получается незначительным.



Если у кого-нибудь из участников Турнира получится существенно улучшить оценку сверху или получить хорошую оценку снизу, просьба написать автору задачи по адресу mmo2022kosmos@mail.ru