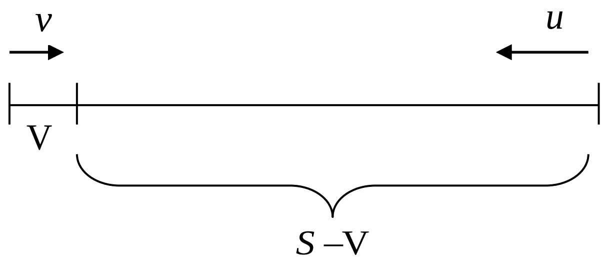
Предварительные решения задач

базового варианта 8-9 класса 43-го ТГ (6 марта 2022).

№ 1. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один — медленно, другой — быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше — быстрого хозяина или медленного?

Ответ. Собаки вернутся одновременно.

Решение. Пусть скорость 1-го равна v, 2-го равна u, а скорость собак – ω, исходное расстояние между ними S. Тогда $v<u$; 1-й сближается с собакой со скоростью $v+\omega$ и время до встречи первого с собакой второго $t_1 = S\cdot\dfrac{1}{v+\omega}$. При этом 1-й прошел путь $\mathrm{V} = vt_1 = S\cdot\dfrac{v}{v+\omega}$. Тогда 2-й вместе со своей собакой до их встречи прошли (пробежали) путь $2(S-\mathrm{V})$ с общей скоростью $(u+\omega)$. На это ушло время, равное



$$\frac{2(S-\Delta)}{u+\omega} = \frac{2S-2S\dfrac{v}{v+\omega}}{u+\omega} = 2S\cdot\frac{1-\dfrac{v}{v+\omega}}{u+\omega} = 2S\cdot\frac{v+\omega-v}{(u+\omega)(v+\omega)} = \frac{2S\cdot\omega}{(u+\omega)(v+\omega)}.$$

Аналогичный расчет будет для встречи 1-го со своей собакой; как видим время будет одинаково!

№ 2. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Ответ. Верно.

Доказательство. Пусть исходное число содержит в своем разложении на простые множители p двоек и k пятерок; тогда после $p - k$ домножений на 5 полученное число будет иметь в конце p нулей, а перед ними нечетную цифру. При следующем домножении на 5 последней цифрой станет 5-ка, которая будет сохраняться и при дальнейших домножениях.

№ 3. На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Ответ. сможет,

Решение. Пронумеруем все монеты от 1 до 11. Пусть монеты № 1 – № 4 нужно проверить. Первым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю монеты с 3-й и 4-й. Если весы не уравновесились, то среди монет 1, 2, 3, 4 точно есть фальшивая.

Пусть весы оказались в равновесии. Тогда на двух чашах поровну фальшивых монет, т.е. среди 1-й, 2-й, 3-й, 4-й монет есть либо 0, либо 2, либо 4 фальшивые!

Вторым взвешиванием сравниваем монеты 1, 2, 3, 4 с монетами 5, 6, 7, 8. Если монеты 1, 2, 3, 4 настоящие, то они вместе тяжелее, чем монеты 5, 6, 7, 8, так как среди монет 5, 6, 7, 8 в этом случае точно есть фальшивая (это необходимое условие того, что монеты №1–№4 настоящие).

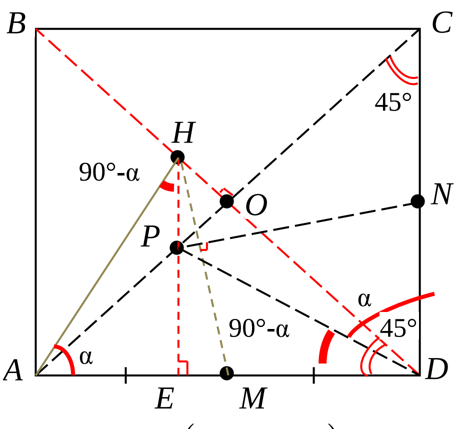
Покажем, что это условие (т.е. то, что монеты №1–№ 4 тяжелее) – является и достаточным для того, чтобы они были настоящими. Действительно, если (от противного) среди монет №1–№ 4 есть фальшивые, т.е. 2 или 4 фальшивые, то они будут либо равны, либо легче монет 5, 6, 7, 8, ибо среди последних будет не более двух фальшивых монет.

№ 4. На диагонали *AC* квадрата *ABCD* взята точка *P*. Пусть *H* — точка пересечения высот треугольника *APD*, *M* — середина *AD* и *N* — середина *CD*. Докажите, что прямые *PN* и *MH* взаимно перпендикулярны.

***Примечание* 1.** Есть разные решения этой задачи, в частности, через применение систем координат или через прменение векторов. Но есть и классичекие. Вот некоторые из них.

Примечание 2. Отметим, что оба приведенных ниже решения остаются по существу верными (с небольшими изменениями) при различных положениях точки Р как на отрезке АО, так и на отрезке ОС.

Первое решение (с использованием преобразования плоскости – поворота).

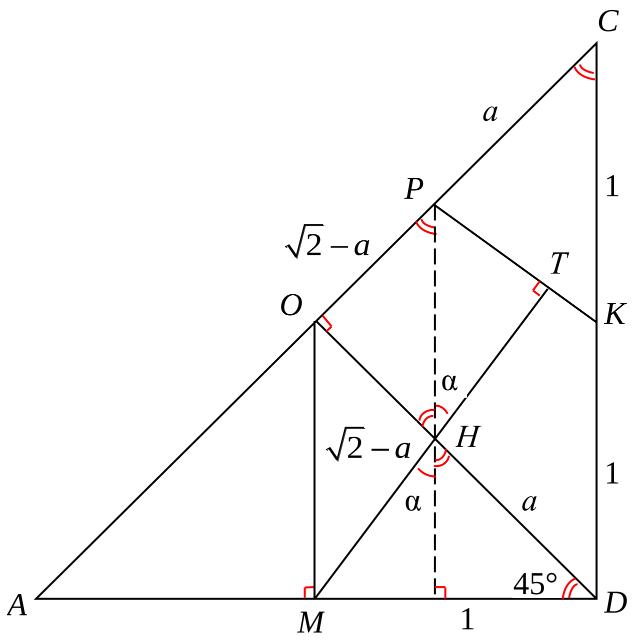


Рассмотрим сначала случай, когда $P \in AO$, где O – точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$; слева на рисунке показано расположение точки Н – точки пересечения высот ΔAPD, принадлежащей BD.

Заметим, что отрезки PN и HM являются медианами треугольников CPD и DHA соответственно. И еще заметим, что эти треугольники равны по стороне $(CD = AD)$ и двум прилежащим углам: $\angle PCD = 45° = \angle HDA$. Кроме того, если $\angle HAE = \alpha$ (в ΔAHD), то ввиду перпендикулярности AH и PD (AH высота в треугольнике APD) получаем $\angle ADP = 90° - \alpha \Rightarrow \angle PDC = \alpha$ (в ΔCPD).

Итак $\Delta CPD = \Delta DHA$, причем ΔCPD получается из ΔDHA поворотом квадрата на 90° вокруг центра О. Тогда и медиана HM при повороте на 90° перейдет в медиану PN.

Второе решение (классическое).



Пусть $AM = MD = DK = KC = 1 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow AO = OC = \sqrt{2}.$ Пусть $PC = a \Rightarrow OP = OH = \sqrt{2} - a \Rightarrow HD = a \Rightarrow \Delta PCK = \Delta HDM \Rightarrow \angle CPK = \angle DHM = 45° + \alpha.$ Значит $\angle HPK = 180° - 45° - (45° + \alpha) = 90° - \alpha.$ Тогда $\angle PTH = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°.$

№ 5. Прямоугольник 1 × 3 будем называть триминошкой. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20 × 21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

***Ответ*: 14 рублей.**

Решение. Покажем, что Вася не может гарантированно выиграть более 14 рублей. Действительно, разрежем доску следующим образом на 14 триминошек и 42 квадрата 3×3 как показано на рисунке:

1×3	**...**					
1×3	**...**					
3×3	3×3	**...**				3×3
...						
3×3						3×3

В каждом квадрате 3×3 Петя может расположить 3 триминошки горизонтально или вертикально, поэтому как бы Вася не поставил свои триминошки в нижней части доски 18×21 Петины триминошки могут не совпасть ни с одной Васиной. Например, если хоть одна Васина триминошка в некотором (вообще говоря, произвольном) квадрате 3×3 лежит горизонтально, то все три Петины могут лежать в этом квадрате вертикально, и наоборот. (Тем более, если какие-то Васины триминошки лежат в этом квадрате частично.) Поэтому гарантировать совпадение триминошек в указанной части нельзя, и Петя может проиграть по рублю только за 14 верхних триминошек.

Предположим теперь, что Вася расположил все свои триминошки горизонтально. Покажем, что тогда он гарантированно выигрывает 14 рублей. Разрежем доску на 7 вертикальных полос 3×20 и докажем, что в каждой полосе Петя вынужден расположить хотя бы две горизонтальные триминошки всего получится 14 триминошек, совпадающих с триминошками Васи.

Пусть a_i, $i=1,2,...,18$ – число горизонтальных триминошек, левая клетка которых расположена в i-той вертикали. (Ясно, что a_{19} и a_{20} равныт нулю, ибо горизонтальные триминошки не могут иметь свои левые клетки в 19-м и 20-м столбцах.)

Поскольку каждая вертикаль содержит 20 клеток, а вертикальная триминошка занимает 3 клетки одной вертикали, то числа $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_2+a_3+a_4, a_3+a_4+a_5, a_{16}+a_{17}+a_{18}, a_{17}+a_{18}, a_{18}$, которые равны количеству клеток доски принадлежащим горизонтальным триминошкам в 1-м, 2-м, ..., 18-м столбцах соответственно, должны давать остаток 2 от деления на 3, т.е иметь вид $3k+2$. Раз $a_1=3k_1+2$ и $a_1+a_2=3k_2+2$, то a_2 делится на 3, а $a_1 \geq 2$. Раз $a_1+a_2+a_3=3k_3+2$, то a_3 делится на 3. Раз $a_2+a_3+a_4=3k_4+2$, то a_4 дает остаток 2 от деления на 3. Продолжая так же, убеждаемся, что $a_i=3k_i+2$, если $i=3m+1$, и $a_i \vdots 3$ в противном случае. В частности $a_i \geq 2$ при $i=3m+1$, m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, а это как раз и означает, что в каждой из семи вертикальных полос 3×20 лежит не менее двух горизонтальных триминошек.