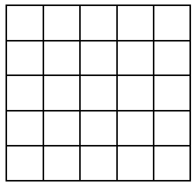
СОРОК ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **Осенний тур**

6-7 кл., сложный вариант 23 октября 2022 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы	***Задачи***
3	1. Найдите все четырёхзначные натуральные числа, каждое из которых равно четвёртой степени суммы своих цифр.
1	2. а) Из шахматной доски 8×8 вырезали клетки a1 и c8. Можно ли полученную доску разрезать на доминошки размером 2×1?
4	б) Из шахматной доски 8×8 вырезали какие-то две клетки разного цвета. Верно ли, что полученную доску всегда можно разрезать на доминошки размером 2×1? *В обоих пунктах резать можно только по границам клеток. Ваши ответы обоснуйте.*
	3. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т.д. изготовили одну отдельную карточку и записали на неё это число.
2	а) Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной — двойки?
3	б) Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной — двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?
6	4. Некоторая фирма решила подарить школе 10 одинаковых наборов юных художников. В каждом наборе были карандаши, баночки с красками и альбомы для рисования. Причем баночек с красками было столько же, сколько карандашей и альбомов вместе. Однако в красках обнаружились вредные примеси. Тогда в некоторых наборах баночки с краской заменили на карандаши, в некоторых – на альбомы, а в одном наборе просто убрали баночки с краской. После этого баночек с красками в наборах не осталось, карандашей стало 89, а альбомов – 44. Сколько карандашей, альбомов и баночек с красками первоначально было в каждом наборе?
6	5. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 48 км, одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист (из пункта A) и автомобилист (из пункта B). Прибыв в пункт A автомобилист сразу повернул обратно и поехал обратно в пункт B, затем в пункт A и наконец в пункт B. Первая встреча велосипедиста и автомобилиста произошла в 37 км от пункта B. Третья встреча произошла тогда, когда автомобилист во второй раз ехал из пункта B в пункт A. Во сколько раз, после третьей встречи, автомобилист должен увеличить свою скорость, чтобы, доехав до пункта A и повернув назад, приехать в пункт B одновременно с велосипедистом? Считать, что скорости движения автомобилиста и велосипедиста постоянные (в том числе скорость автомобилиста постоянна после третьей встречи и повышения скорости).
	6. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске по очереди выписываются некоторые целые числа от 0 до n. За один ход записывается одно число. Каждое число записывается не более одного раза. Первым ходит Петя. Проигрывает тот, после хода которого можно выбрать нечетное количество чисел, из уже написанных на доске и таких, что их сумма делится на n.
3	а) Пусть n=9. Как должен играть Вася, чтобы победить?
5	б) Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть в общем случае? (Ответ объясните.).
10	7. Во время игры дети выложили из сахара сетку так, что получился клетчатый квадрат 5×5 и оставили его на столе (см. рис. справа). Таракан Петя стал двигаться по линиям сетки, начиная с самого левого верхнего узла. Причем участок сетки до ближайшего узла он просто прополз (*будем называть такие участки между соседними узлами дорожками*). Двигаясь до следующего узла, таракан съел дорожку из сахара, по которой прополз. Потом он опять просто полз до следующего узла и т.д., чередуя простое проползание по дорожке с ее съеданием. Таракан двигается только по существующим дорожкам из сахара, причем никогда не уползает из узла по той же дорожке, по которой только что приполз. Какое наибольшее количество дорожек из сахара сможет съесть таракан Петя?



СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т.д. изготовили одну отдельную карточку и записали на неё это число.

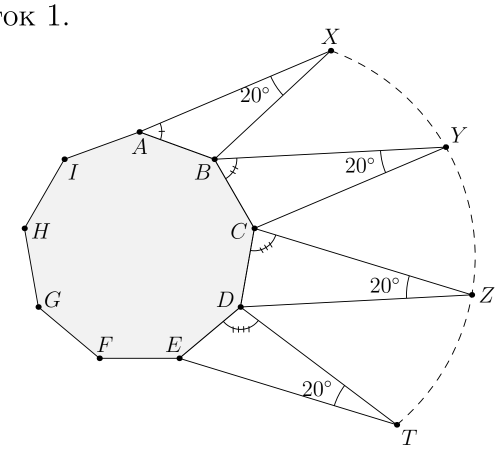
2 а) Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной — двойки?

3 б) Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной — двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

6 3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

7 4. Пусть $n > 1$ — целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

9 5. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.



10 6. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом — ещё раз, и т.д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

3 а) $N = 2$;

8 б) $N = 3$.

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
5	1.	Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100?
5	2.	Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдется натуральное n, для которого $$\text{НОК}(p+n, q+n) < \text{НОК}(p, q).$$
6	3.	Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.
7	4.	В клетчатом квадрате между любыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.
8	5.	В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?
	6.	Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если
2	а)	$N=2$;
7	б)	$N=3$.
	7.	У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если
5	а)	$N=201$;
5	б)	$N=400$?